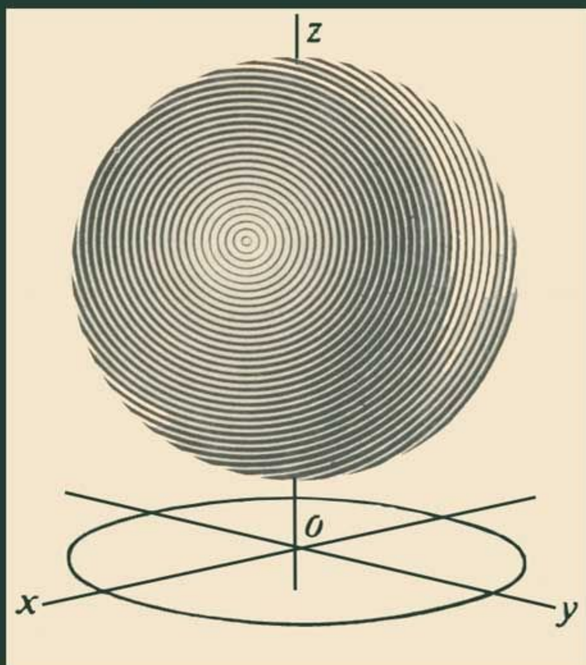
Geometría

Dirigido por G. N. Yákovliev



Editorial MIR Moscú

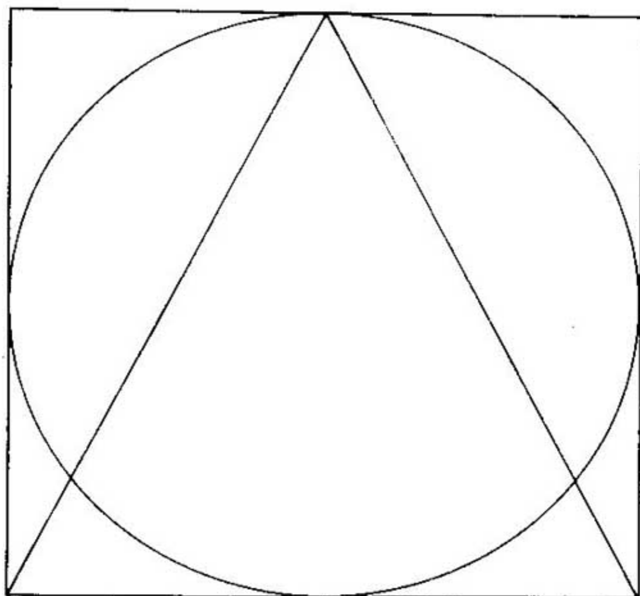

ИЗДАТЕЛЬСТВО
МИР

МАТЕМАТИКА ДЛЯ ТЕХНИКУМОВ

ГЕОМЕТРИЯ

Под редакцией Г. Н. Яковлева

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
МОСКВА



Geometría

Dirigido por G. N. Yákovliev

EDITORIAL MIR MOSCÚ

Traducido del ruso por
A. Mijailín

Impreso en la URSS

INDICE

PREFACIO

Este libro es un manual del curso de «Geometría» para los centros de enseñanza secundaria especial. Los autores trataron de dar a conocer a los estudiantes las nociones matemáticas más importantes y los métodos que tienen gran aplicación, así como de mantener una debida sucesión en el contenido, terminología y simbolismo con el curso de matemática de la escuela secundaria. El material teórico se expone conjuntamente con el análisis de los problemas, y al final de cada capítulo se ofrecen problemas para el estudio individual de los estudiantes.

La segunda edición del manual está representada por un solo libro y se modificó sustancialmente, tomando en cuenta las observaciones de profesores y metodistas formuladas al discutir el manual, así como la experiencia acumulada durante el trabajo con el mismo. Se modificó y complementó el sistema de ejercicios para cada capítulo.

Señalemos las diferencias más sustanciales de la segunda edición del manual.

En la nueva edición los vectores en el plano y en el espacio se interpretan no como traslados paralelos, sino como segmentos dirigidos con las respectivas operaciones de adición de los vectores y de multiplicación del vector por un número. Los problemas geométricos y físicos que se resuelven por el método vectorial (cap. I) están sistematizados y reunidos en un mismo párrafo. El número de tales problemas fue considerablemente aumentado.

El material del capítulo II «Rectas en el plano» y del capítulo III «Curvas de segundo orden» está considerablemente modificado y expuesto con mayor precisión. También se efectuaron algunas reducciones. Por ejemplo, del capítulo II se excluyó el párrafo «Ecuación de una recta en coordenadas polares», y del capítulo III, los párrafos dedi-

cados a la construcción de puntos de la elipse, hipérbola y parábola con ayuda del compás y la regla.

La primera parte del capítulo IV «Rectas y planos en el espacio. Poliedros» está escrita de nuevo y contiene los principales conocimientos de la estereometría. Aquí están expuestas tales cuestiones como la axiomática de la estereometría, situación recíproca de las rectas y planos en el espacio, el teorema de las tres perpendiculares, etc. La segunda parte del capítulo IV está dedicada a los poliedros y es una modificación del material correspondiente del capítulo II parte II de la primera edición.

El capítulo V «Ecuaciones de las rectas y de los planos en el espacio» está reducido considerablemente, ya que el material relativo a la estereometría está expuesto, principalmente, en el capítulo anterior, sin servirse de los métodos de la geometría analítica.

En el capítulo VII «Volúmenes de los cuerpos y áreas de las superficies» están simplificadas sustancialmente las definiciones y terminología. La deducción de muchas fórmulas está simplificada, y algunas fórmulas secundarias están suprimidas.

En la segunda edición del libro está incluido un «Breve esbozo histórico».

El material que excede el marco del programa está marcado con un asterisco.

En la preparación de la segunda edición se prestó especial atención al mejoramiento del estilo. Los autores consideran que lograron simplificar muchas demostraciones, haciéndolas así más accesibles para los estudiantes.

Los problemas están sistematizados para todos los capítulos, gran parte de ellos está sustituida por nuevos. Las formulaciones de muchos problemas viejos están precisadas. Han sido eliminadas todas las inexactitudes y erratas percibidas en las respuestas.

Los autores consideran como un deber agradable expresar su gratitud al crítico oficial, profesor de la escuela técnica de la ciudad de Kuznetsk, V. I. Kogan, al metodista superior del Gabinete Científico y Metodológico del Ministerio de Enseñanza Superior de la URSS, I. I. Agápova y a los profesores de las escuelas técnicas de Moscú A. A. Adamovich, I. V. Borisova, Z. I. Dobrina, E. V. Zarkova que examinaron atentamente el original del manual e hicieron una serie de valiosas observaciones críticas.

Los autores

Capítulo I

VECTORES EN EL PLANO Y EN EL ESPACIO

§ 1. Variables vectoriales y escalares

En la mecánica, en la física y en muchas ciencias técnicas se estudian magnitudes de distinto género. Unas magnitudes (longitud, área, volumen, masa, densidad, temperatura, etc.) se definen completamente por un solo valor numérico, una vez escogida la unidad de medida. Tales magnitudes se denominan variables *escalares* (numéricas).

Otras magnitudes (fuerza, velocidad, aceleración, etc.) se definen no sólo por el valor numérico, sino también por

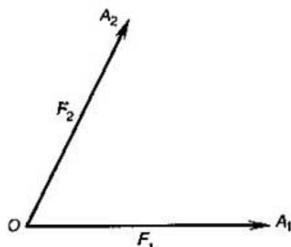


Fig. 1

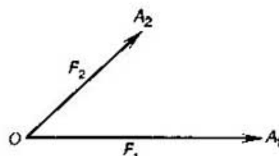


Fig. 2

la orientación en el espacio. Tales magnitudes se denominan variables *vectoriales*.

La variable vectorial se expresa geométricamente por medio de un segmento de determinadas longitud y dirección. Al mismo tiempo, la longitud del segmento, según la unidad de escala escogida, es igual al valor numérico de la variable vectorial, y la dirección del segmento coincide con la dirección de esta variable. Supongamos, por ejemplo, que al punto O están aplicadas dos fuerzas $\boldsymbol{F}_1$ y $\boldsymbol{F}_2$ (fig. 1). Las

magnitudes de estas fuerzas son iguales, pero tienen distintas direcciones y, por lo tanto, están representadas en la figura por dos segmentos dirigidos distintos $\overrightarrow{OA}_1$ y $\overrightarrow{OA}_2$ de igual longitud.

Si la magnitud de la fuerza $\boldsymbol{F}_1$ es superior a la magnitud de la fuerza $\boldsymbol{F}_2$, la longitud del segmento $\overrightarrow{OA}_1$, que expresa

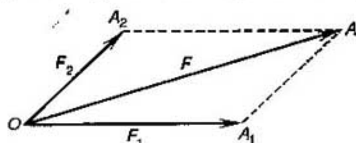


Fig. 3

la fuerza $\boldsymbol{F}_1$, debe ser respectivamente mayor que la longitud del segmento $\overrightarrow{OA}_2$, que presenta la fuerza $\boldsymbol{F}_2$ (fig. 2).

De la mecánica se sabe, que las fuerzas aplicadas a un mismo punto se suman según *la regla del paralelogramo*. Por ejemplo, la acción de las fuerzas $\boldsymbol{F}_1$ y $\boldsymbol{F}_2$, aplicadas al punto O, es equivalente a la acción de la fuerza $\boldsymbol{F}$, que se expresa en la figura mediante la diagonal dirigida $\overrightarrow{OA}$ del paralelogramo OA_1AA_2 (fig. 3), construido sobre los segmentos dirigidos $\overrightarrow{OA}_1$ y $\overrightarrow{OA}_2$. En este caso se escribe $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2$.

En general, para estudiar las variables vectoriales es cómodo utilizar los segmentos dirigidos, para los cuales, según las reglas respectivas, están introducidas la noción de igualdad y definidas las operaciones de adición y multiplicación por un número. Tales segmentos dirigidos se denominan vectores.

§ 2. Vectores

Cualquier segmento de una recta tiene dos puntos extremos. Si uno de ellos se toma como origen del segmento y el otro, como punto final, el segmento en cuestión se denota *dirigido*. Los segmentos dirigidos habitualmente se denotan con dos letras con flechas, por ejemplo, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, etc., donde la primera letra denota el origen del segmento y la secunda, el extremo del segmento.

Dos segmentos dirigidos se consideran *iguales* si tienen longitudes iguales, son paralelos y están orientados en un mismo sentido. Por ejemplo, en la figura 4 donde $ABCD$ es un paralelogramo, los segmentos dirigidos $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{DC}$ son iguales, ya que $|AB| = |DC|$, $(AB) \parallel (DC)$ y los segmentos $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{DC}$ están orientados en el mismo sentido.

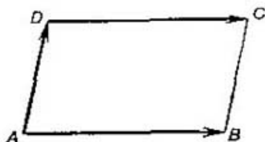


Fig. 4

Los segmentos dirigidos $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AD}$ no son iguales, ya que no son paralelos. Los segmentos dirigidos $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ tampoco son iguales, ya que tienen el sentido opuesto, aunque son paralelos y de la misma longitud.

Los segmentos dirigidos con la noción de igualdad introducida se denominan *vectores*. En los párrafos que siguen serán introducidas para ellos las operaciones de adición, sustracción y multiplicación por un número.

Conforme a la definición todos los segmentos dirigidos iguales entre sí representan un mismo vector. Por ejemplo, si un vector representado en la figura 4 como un segmento dirigido $\overrightarrow{AB}$, se denota $\boldsymbol{a}$, entonces $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

La longitud del vector $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{AB}$ denotada $|\boldsymbol{a}|$ o $|\overrightarrow{AB}|$, es la longitud del segmento AB. *La dirección del vector* $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{AB}$, es la dirección definida por el rayo AB.

Un vector, cuya longitud es igual a cero, se denomina *vector nulo* y se designa $\mathbf{0}$. Es evidente, que el origen del vector nulo coincide con su extremo: $\mathbf{0} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB}$.

Así pues, *cada vector* $\boldsymbol{a} \neq \mathbf{0}$ *se define completamente por la longitud y la dirección. El vector nulo no tiene dirección.*

§ 3. Suma de vectores

Sean dados dos vectores $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{OA}$ y $\boldsymbol{b} = \overrightarrow{OB}$ (fig. 5). Tracemos del punto A tal segmento AC, que $\overrightarrow{AC} = \boldsymbol{b}$. Entonces el vector $\boldsymbol{c} = \overrightarrow{OC}$ se denomina *suma de los vectores* $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ y se designa $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$.

Así pues, $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC}$. Esta igualdad se denomina *regla del triángulo* de adición de dos vectores. Es evidente, que esta regla es válida en el caso, cuando los puntos O, A

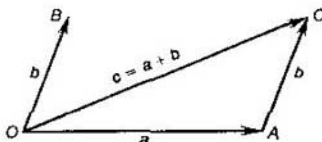


Fig. 5

y B se encuentran en una misma recta (figs. 6, 7). En particular, $\boldsymbol{a} + 0 = \boldsymbol{a}$.

La adición de los vectores tiene las siguientes propiedades:



Fig. 6

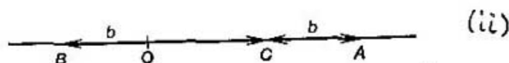


Fig. 7

1. Propiedad de conmutatividad: para cualesquiera vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}. \tag{1}$$

2. Propiedad de asociatividad: para cualesquiera vectores $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{c}$

$$(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}). \tag{2}$$

□ 1. Supongamos que $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{OA}$, $\boldsymbol{b} = \overrightarrow{OB}$. Consideremos el caso cuando los puntos O, A y B no están situados en la misma recta. Construyamos en los segmentos OA y OB el

paralelogramo $OACB$ (fig. 8). Entonces $|OA| = |BC|$, $(OA) \parallel (BC)$ y $|OB| = |AC|$, $(OB) \parallel (AC)$, como lados

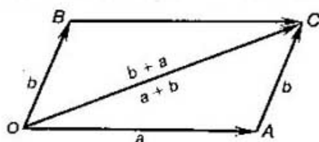


Fig. 8

opuestos del paralelogramo. Por lo tanto, $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{BC}$, $\boldsymbol{b} = \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{AC}$ y, por consiguiente

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC}, \quad \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC},$$

lo que demuestra la igualdad (1).

Para el caso, cuando los puntos O, A, B están situados en una misma recta, demuestren las igualdades independientemente (1). ✱

2. Tracemos desde cierto punto O el vector $\overrightarrow{OA} = \boldsymbol{a}$, del punto A, el vector $\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{b}$ y, por último, tracemos el

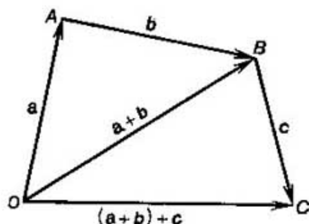


Fig. 9

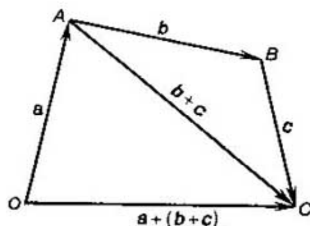


Fig. 10

vector $\overrightarrow{BC} = \boldsymbol{c}$ desde el punto B (figs. 9, 10). Unamos con el segmento OC los puntos O y C. Entonces, por un lado, (véase la fig. 9),

$$(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c} = (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}) + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC},$$

y, por otro lado, (véase la fig. 10),

$$a+(b+c)=\overrightarrow{OA}+(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC},$$

lo que demuestra la igualdad (2). ■

De la figura 8 se ve, que la suma de los vectores $a=\overrightarrow{OA}$ y $b=\overrightarrow{OB}$ es igual a la diagonal dirigida $\overrightarrow{OC}$ del paralelogramo $OACB$, construido sobre los segmentos OA y OB, es decir

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}.$$

Esta igualdad se denomina *regla del paralelogramo* de adición de dos vectores.

Puesto que la adición de los vectores es asociativa, la suma de tres y mayor cantidad de vectores se escribe sin

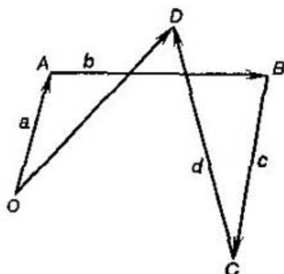


Fig. 11

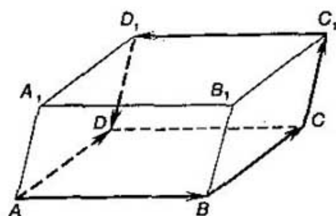


Fig. 12

paréntesis. Por ejemplo, en vez de $(a+b)+c$ o $a+(b+c)$ se escribe $a+b+c$.

Si se requiere hallar la suma de tres o mayor cantidad de vectores, se utiliza la llamada *regla del polígono*. Esta consiste en lo siguiente.

Supongamos que se dan los vectores a, b, c, d y se requiere hallar su suma.

Escojamos cierto punto O (fig. 11) y construyamos tal segmento OA que $\overrightarrow{OA}=a$, luego, construyamos tal segmento AB que $\overrightarrow{AB}=b$, etc. Sigamos construyendo hasta que no sean agotados todos los vectores sumandos. El segmento

dirigido $\overrightarrow{OD}$ que cierra la quebrada obtenida; será igual a la suma de los vectores dados.

Problema 1. Se da el paralelepípedo $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Hállese la suma de los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{B_1C_1}$, $\overrightarrow{CC_1}$, $\overrightarrow{B_1A_1}$, $\overrightarrow{B_1B}$ (fig. 12).

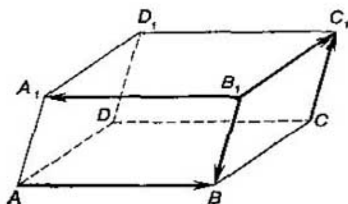


Fig. 13

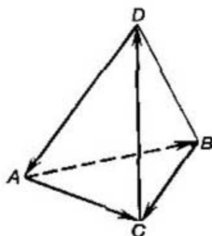


Fig. 14

△ De las propiedades de las aristas del paralelepípedo se deduce, que $\overrightarrow{B_1C_1} = \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{B_1A_1} = \overrightarrow{C_1D_1}$, $\overrightarrow{B_1B} = \overrightarrow{D_1D}$. Por lo tanto

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B_1C_1} + \overrightarrow{CC_1} + \overrightarrow{B_1A_1} + \overrightarrow{B_1B} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CC_1} + \overrightarrow{C_1D_1} + \overrightarrow{D_1D}.$$

Utilizando la regla del polígono, obtendremos (fig. ~~13~~ 12)

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CC_1} + \overrightarrow{C_1D_1} + \overrightarrow{D_1D} = \overrightarrow{AD}. \ ▲$$

Problema 2. Hállese la suma $\overrightarrow{KD} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{DM} + \overrightarrow{CK}$.

△ Utilizando la propiedad de conmutatividad de la adición de vectores obtenemos

$$\overrightarrow{KD} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{DM} + \overrightarrow{CK} = \overrightarrow{KD} + \overrightarrow{DM} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CK}.$$

Ahora según la regla del polígono hallamos

$$\overrightarrow{KD} + \overrightarrow{DM} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CK} = \overrightarrow{KK} = 0. \ ▲$$

Problema 3. Se da la pirámide triangular $ABCD$ (fig. 14). Hállese la suma $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DA}$.

△ Utilizando las propiedades de conmutatividad y de asociatividad de la adición de vectores, obtendremos

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DA} =$$

$$= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC}. \ \blacktriangle$$

§ 4. Vectores opuestos. Sustracción de los vectores

Cualesquiera de los dos vectores, cuya suma es igual al vector nulo, se denominan *opuestos*. El vector opuesto al vector $\boldsymbol{a}$ se designa $-\boldsymbol{a}$. Por lo tanto, según la definición

$$\boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{0}.$$

De la definición se deduce que, si $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{AB}$, $-\boldsymbol{a} = \overrightarrow{BA}$, es decir, los vectores opuestos tienen longitudes iguales

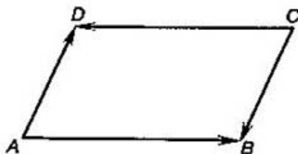


Fig. 15

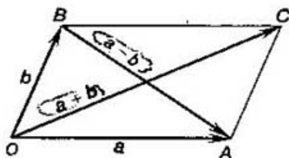


Fig. 16

y direcciones opuestas. Por ejemplo, si $ABCD$ es un paralelogramo, los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ son opuestos (fig. 15). Los vectores $\overrightarrow{AD}$ y $\overrightarrow{CB}$ también son opuestos.

Para cualesquiera de los dos vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$, el vector $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{b})$ se denomina *diferencia de los vectores* $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ y se designa $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$. Así pues, según la definición

$$\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{b}).$$

Si $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{OA}$ y $\boldsymbol{b} = \overrightarrow{OB}$ (fig. 16), entonces $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BO} = \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{BA}$. Por lo tanto,

$$\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BA}, \qquad (1)$$

En la figura se ve que $\overrightarrow{BA}$ es una diagonal dirigida del paralelogramo $OACB$, construido sobre los segmentos OA y OB. La otra diagonal $\overrightarrow{OC}$ expresa la suma de los vectores $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$.

No es difícil notar que la fórmula (1) puede utilizarse sin recurrir al dibujo: con este propósito es suficiente observar

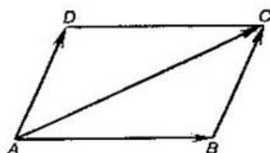


Fig. 17

atentamente el orden de disposición de las letras en la inscripción de los datos y vectores buscados. Así, por ejemplo,

$$\overrightarrow{PQ} - \overrightarrow{PN} = \overrightarrow{NQ}. \tag{2}$$

Problema. Se da tal cuadrilátero $ABCD$, que $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$. Demuéstrese que $ABCD$ es un paralelogramo.

Según la fórmula (2) se tiene

$$\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}.$$

Por consiguiente, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$ y, por lo tanto, $|\overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{AD}|$ y $(BC) \parallel (AD)$. De aquí se deduce que $ABCD$ es un paralelogramo (fig. 17). ▲

§ 5. Multiplicación del vector por un número

Se denomina *producto del vector no nulo* $\boldsymbol{a}$ *por un número* $x \neq 0$ el vector, cuya longitud es igual a $|x| \cdot |\boldsymbol{a}|$, y la dirección coincide con la dirección $\boldsymbol{a}$, si $x > 0$, y opuesta a ésta, si $x < 0$. Se denomina vector nulo *el producto del vector nulo por cualquier número* x *y el producto de cualquier vector por el número cero.*

El producto del vector $\boldsymbol{a}$ por el número x se designa $x \cdot \boldsymbol{a}$ (el factor numérico se escribe a la izquierda). De acuerdo con la definición $|x \cdot \boldsymbol{a}| = |x| \cdot |\boldsymbol{a}|$ para cualquier vector $\boldsymbol{a}$ y para cualquier número x.

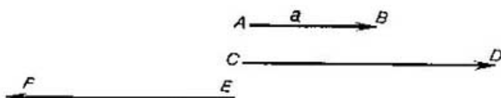


Fig. 18

En la figura 18 está representado el producto del vector $\boldsymbol{a}$ por el número $x = 2$ (vector $\overrightarrow{CD}$) y por el número $x = -2$ (vector $\overrightarrow{EF}$).

La multiplicación del vector por un número tiene las siguientes propiedades:

1. Propiedad de asociatividad:

$$x \cdot (y \cdot \boldsymbol{a}) = (x \cdot y) \cdot \boldsymbol{a}.$$

2. Propiedad de distributividad respecto al factor vectorial:

$$x \cdot \boldsymbol{a} + y \cdot \boldsymbol{a} = (x + y) \cdot \boldsymbol{a}.$$

3. Propiedad de distributividad respecto al factor numérico:

$$x \cdot \boldsymbol{a} + x \cdot \boldsymbol{b} = x \cdot (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}).$$

□ Si $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$ ó $xy = 0$, la igualdad $x(y\boldsymbol{a}) = (xy)\boldsymbol{a}$ es evidente, ya que a la izquierda y a la derecha se sitúan los vectores nulos.

Sea $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$, $xy \neq 0$ y $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{OA}$. Entonces los vectores $x(y \cdot \overrightarrow{OA})$ y $(xy)\overrightarrow{OA}$ se sitúan en la recta OA, tienen una longitud de $|x| \cdot |y| \cdot |\overrightarrow{OA}|$ y están dirigidos en el mismo sentido: en dirección al vector $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{OA}$, si $xy > 0$, y en dirección opuesta, si $xy < 0$. Así pues, la propiedad 1 está demostrada.

No vamos a demostrar las propiedades 2 y 3. Señalemos sólo que las propiedades 1 y 2 son las propiedades de los vectores en la recta. Ellas ya fueron demostradas en el curso de geometría de la escuela secundaria de ocho grados. La

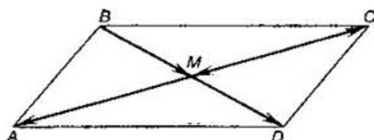


Fig. 19

propiedad 3 es una propiedad de los vectores en el plano, también fue demostrada. ■

Problema. En el paralelogramo $ABCD$ el punto M es un punto de intersección de las diagonales. Hállese el factor k en cada uno de los siguientes casos:

1) $\overrightarrow{MC} = k\cdot\overrightarrow{CA}$; 2) $\overrightarrow{BD} = k\cdot\overrightarrow{BM}$; 3) $\overrightarrow{AC} = k\cdot\overrightarrow{CM}$; 4) $\overrightarrow{BB} = k\cdot\overrightarrow{BD}$; 5) $\overrightarrow{AA} = k\cdot\overrightarrow{CC}$.

△ Conforme a la definición de multiplicación del vector por un número tenemos (fig. 19).

1) $\overrightarrow{MC} \uparrow\downarrow \overrightarrow{CA}$, $|CA| = 2\cdot|MC|$, de donde $k = -\frac{1}{2}$;
2) $\overrightarrow{BM} \uparrow\uparrow \overrightarrow{BD}$, $|BD| = 2\cdot|BM|$, de donde $k = 2$;
3) $\overrightarrow{CM} \uparrow\downarrow \overrightarrow{AC}$, $|CM| = \frac{1}{2}\cdot|AC|$, de donde $k = -2$;
4) $\overrightarrow{BB} = \mathbf{0}$, $\overrightarrow{BD} \neq \mathbf{0}$, de donde $k = 0$;
5) $\overrightarrow{AA} = \mathbf{0}$, $\overrightarrow{CC} = \mathbf{0}$, de donde k es cualquier número. ▲

§ 6. Vectores colineales

Dos vectores no nulos, cuyas direcciones coinciden o son opuestas, se denominan *colineales.*

Así, por ejemplo, en la figura 20 los vectores $\overrightarrow{BC}$ y $\overrightarrow{AD}$ son colineales, y los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$, no lo son.

Si los vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ son colineales, se dice también que

el vector $\boldsymbol{a}$ es colineal al vector $\boldsymbol{b}$, y el vector $\boldsymbol{b}$ es colineal al vector $\boldsymbol{a}$.

El vector nulo se considera colineal a cualquier vector.

Teorema (criterio de colinealidad). *Para que el vector* $\boldsymbol{a}$ *sea colineal al vector* $\boldsymbol{b}$ *no nulo, es necesario y suficiente que exista un número* k, *que satisfaga la condición*

$$\boldsymbol{a} = k\boldsymbol{b}. \qquad (1)$$

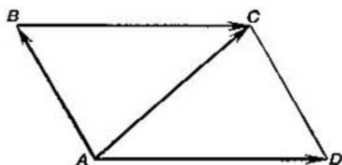


Fig. 20

□ **Suficiencia.** Si para un determinado k la igualdad (1) se cumple, los vectores $\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{a}$ son colineales de acuerdo con la definición de multiplicación del vector por un número y la definición de los vectores colineales.

Necesidad. Supongamos que el vector $\boldsymbol{a}$ es colineal al vector $\boldsymbol{b}$ no nulo. Son posibles los siguientes tres casos: $\boldsymbol{a} \uparrow\uparrow \boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{a} \downarrow\uparrow \boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$.

Si $\boldsymbol{a} \uparrow\uparrow \boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{a} = \frac{|\boldsymbol{a}|}{|\boldsymbol{b}|} \cdot \boldsymbol{b}$, es decir, la igualdad (1) es válida con $k = \frac{|\boldsymbol{a}|}{|\boldsymbol{b}|}$.

Si $\boldsymbol{a} \downarrow\uparrow \boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{a} = -\frac{|\boldsymbol{a}|}{|\boldsymbol{b}|} \cdot \boldsymbol{b}$, es decir, la igualdad (1) es válida para $k = -\frac{|\boldsymbol{a}|}{|\boldsymbol{b}|}$.

Si $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{a} = 0 \cdot \boldsymbol{b}$, es decir, la igualdad (1) es válida para $k = 0$. ■

Problema. Demostrar que los vectores $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB} + 2\overrightarrow{BA}$ y $\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ son colineales.

△ Utilizando las propiedades de las operaciones aplicadas a los vectores, obtendremos

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB} + 2\overrightarrow{BA} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA}) + (\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA}) = \\ = \boldsymbol{0} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{AC}.$$

Así pues, $AB + CB + 2BA = -3\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\right)$. De acuerdo con el criterio de colinealidad de los vectores, los vectores dados en las condiciones del problema son colineales. ▲

§ 7. Angulo entre dos vectores

Examinemos la noción de ángulo entre dos direcciones en el espacio. En el curso de geometría para el 6-to, 7-mo y 8-vo grados fue considerada la noción de dirección en el plano.

Al igual que en el plano, en el espacio se denomina dirección el conjunto de todos los rayos, cada uno de los cuales



Fig. 21

está codirigido con el dado. Así pues, cualquier rayo del conjunto dado de los rayos codirigidos determina completamente esta dirección (lo mismo que cualquier segmento dirigido determina por completo el vector que él representa). Por lo tanto, la dirección en el espacio se da comúnmente por medio de un solo rayo.

Se denomina *ángulo entre dos direcciones* la magnitud del ángulo menor entre cualesquiera rayos de estas direcciones, que tienen un origen común.

El ángulo entre los rayos l_1 y l_2 se denota $(\widehat{l_1; l_2})$.

Según la definición, el ángulo entre dos direcciones está comprendido en el intervalo $[0°; 180°]$.

Se denomina *ángulo entre dos vectores no nulos*, el ángulo entre las direcciones de estos vectores. El ángulo entre los vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ (fig. 21) se denota $(\widehat{\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b}})$.

Si el ángulo entre los vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ es igual a 90°, estos vectores se denominan *perpendiculares* (u *ortogonales*) y se escribe: $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$.

Señalemos que si $\boldsymbol{a} \uparrow\uparrow \boldsymbol{b}$, $(\widehat{\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b}}) = 0°$ y si $\boldsymbol{a} \uparrow\downarrow \boldsymbol{b}$, $(\widehat{\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b}}) = 180°$.

Examinemos cierta recta l, en la cual está elegida una unidad de medida de longitud. Supongamos que A y B

son ciertos puntos en la recta l, tales que $|AB| = 1$. Entonces, los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BA}$ se denominan versoros de la recta l (fig. 22).

Los versores de la recta dan en ésta dos direcciones. Una de ellas se denomina *positiva*, y la otra, *negativa*.

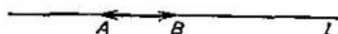


Fig. 22



Fig. 23

Se denomina *eje* la recta en la cual es eligido el punto O (origen de la cuenta) y son dadas la dirección positiva y la unidad de medida de la longitud. Se denomina *versor del eje*

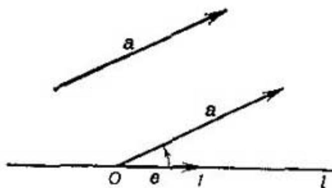


Fig. 24

(fig. 23) el vector $\boldsymbol{e}$ ($|\boldsymbol{e}| = 1$) que determina la dirección del eje.

Se denomina *ángulo entre el vector y el eje*, la magnitud del ángulo entre la dirección del eje y la dirección del vector (fig. 24).

§ 8. Desarrollo del vector en el plano en dos vectores no colineales

Supongamos que los vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ son no colineales. Entonces, si los números x y y satisfacen la condición

$$x \cdot \boldsymbol{a} + y \cdot \boldsymbol{b} = 0, \qquad (1)$$

$x = 0$ y $y = 0$.

□ Efectivamente, si, por ejemplo, $x \neq 0$, de (1) se deduce que

$$a = -\frac{y}{x} \cdot b.$$

Esto contradice a que los vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ son no colineales. De este modo, $x = 0$.

De manera análoga se muestra que $y = 0$. ■

Se dice que el vector $\boldsymbol{a}$ es *una combinación lineal* de los vectores $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \ldots, \boldsymbol{a}_n$, si puede ser expresado en la forma

$$\boldsymbol{a} = x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + \ldots + x_n\boldsymbol{a}_n,$$

donde $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son ciertos números.

Así, el vector $\boldsymbol{a} = 3\boldsymbol{a}_1 - 5\boldsymbol{a}_2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{a}_3$ es una combinación lineal de los vectores $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ y $\boldsymbol{a}_3$.

Teorema. *Cualquier vector $\boldsymbol{m}$ en el plano puede ser definido, además, de un modo único, en forma de combinación lineal de cualesquiera dos vectores no colineales $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$;*

$$\boldsymbol{m} = x \cdot \boldsymbol{a} + y \cdot \boldsymbol{b}. \quad (2)$$

□ Si el vector $\boldsymbol{m}$ es colineal a uno de los vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ (por ejemplo, al vector $\boldsymbol{a}$), entonces para cierto número $\boldsymbol{m}$ tenemos $\boldsymbol{m} = x \cdot \boldsymbol{a} = x \cdot \boldsymbol{a} + 0 \cdot \boldsymbol{b}$. De este modo, el vector $\boldsymbol{m}$ está representado en la forma (2).

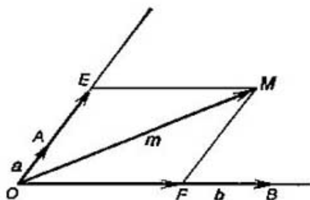


Fig. 25

Si el vector $\boldsymbol{m}$ no es colineal al vector $\boldsymbol{a}$ ni al vector $\boldsymbol{b}$ (fig. 25), entonces, al trazar a través del punto M las rectas, paralelas a $[OB)$ y $[OA)$, tenemos $\boldsymbol{m} = \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF}$. Pero, según el criterio de colinealidad de los vectores existen tales números x y y, que $\overrightarrow{OE} = x\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{OF} = y\boldsymbol{b}$, de donde se desprende la igualdad (2).

Demostremos la unicidad de tal representación. Sea que

$$\boldsymbol{m} = x_1\boldsymbol{a} + y_1\boldsymbol{b} \quad \text{y} \quad \boldsymbol{m} = x_2\boldsymbol{a} + y_2\boldsymbol{b}.$$

Entonces $(x_1 - x_2)\,\boldsymbol{a} + (y_1 - y_2)\,\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$. Pero puesto que los vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ son no colineales, la igualdad es posible

sólo cuando $x_1 = x_2$ y $y_1 = y_2$. La unicidad está demostrada. ■

Si un vector está representado como una combinación lineal de ciertos vectores se dice, que *el vector está desarrollado según estos vectores.*

Se denomina *base en el plano* cualesquiera dos vectores no colineales de este plano, tomados en un orden determinado.

Sea que $\boldsymbol{e}_1$ y $\boldsymbol{e}_2$ es cierta base y $\boldsymbol{a}$, un vector arbitrario, entonces según el teorema demostrado existen dos números x y y tales que

$$\boldsymbol{a} = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2.$$

Los números x e y se denominan *coordenadas del vector* $\boldsymbol{a}$ *en la base dada.* En este caso se escribe $\boldsymbol{a} = (x;\ y)$.

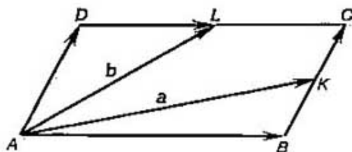


Fig. 26

Problema 1. Los puntos K y L son los puntos medios de los lados BC y CD del paralelogramo $ABCD$. Desarróllese el vector $\overrightarrow{BC}$ en los vectores $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{AK}$ y $\boldsymbol{b} = \overrightarrow{AL}$.

△ De $\triangle AKB$ (fig. 26) tenemos que

$$\overrightarrow{AB} + \frac{\overrightarrow{BC}}{2} = \boldsymbol{a}. \qquad (1)$$

De $\triangle ADL$ obtenemos $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DL} = \boldsymbol{b}$. Puesto que $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{DL} = \frac{\overrightarrow{AB}}{2}$, entonces

$$\overrightarrow{BC} + \frac{\overrightarrow{AB}}{2} = \boldsymbol{b}. \qquad (2)$$

De la igualdad (1) se deduce que

$$\frac{\overrightarrow{AB}}{2} + \frac{\overrightarrow{BC}}{4} = \frac{\boldsymbol{a}}{2} \quad \text{ó} \quad \frac{\overrightarrow{AB}}{2} = \frac{\boldsymbol{a}}{2} - \frac{\overrightarrow{BC}}{4}. \qquad (3)$$

Sustituyendo $\frac{\overrightarrow{AB}}{2}$ de (3) en (2), obtendremos

$$\overrightarrow{BC}+\frac{a}{2}-\frac{\overrightarrow{BC}}{4}=b, \quad \text{ó} \quad \frac{3}{4}\overrightarrow{BC}=b-\frac{a}{2}$$

y, por lo tanto,

$$\overrightarrow{BC}=\frac{4}{3}b-\frac{2}{3}a=-\frac{2}{3}a+\frac{4}{3}b. \ \blacktriangle$$

Problema 2. Se da el $\triangle ABC$, $D\in[BC]$, $|BD|=|DC|$, $[BM]$ es una mediana del triángulo ABC. Hállense las coordenadas del vector $\overrightarrow{BM}$, si los segmentos dirigidos $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BD}$ definen los vectores básicos.

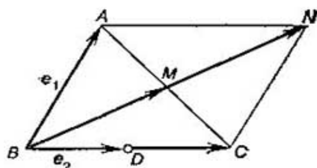


Fig. 27

$\triangle$ Transformemos el $\triangle ABC$ en el paralelogramo $ABCN$ (fig. 27). Entonces $\overrightarrow{BN}=2\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}$. Designando $\overrightarrow{BA}=e_1$, $\overrightarrow{BD}=e_2$, obtendremos $2\overrightarrow{BM}=1\cdot e_1+2\cdot e_2$, de donde $\overrightarrow{BM}=\frac{1}{2}\cdot e_1+1\cdot e_2$.

Así pues, en la base dada $\overrightarrow{BM}=\left(\frac{1}{2}; 1\right)$. $\blacktriangle$

§ 9. Vectores coplanares

Del curso de geometría para secundaria básica se sabe que la recta es paralela al plano, si no tiene puntos comunes con este plano o está situada en éste.

El vector $\overrightarrow{AB}$ lo denominaremos *paralelo al plano*, si la recta AB es paralela a este plano. El vector nulo se considera paralelo a cualquier plano.

Los vectores $a_1, a_2, \ldots, a_n$ se denominan *coplanares* si cada uno de ellos es paralelo a un mismo plano.

Cualesquiera dos vectores son siempre coplanares.

Es evidente, que si tres vectores son coplanares, entonces pueden ser representados por medio de segmentos dirigidos, situados en un mismo plano.

Examinemos la adición de tres vectores no coplanares según la llamada «regla del paralelepípedo».

Sea que los vectores $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{c}$ son no coplanares (fig. 28). Tracemos de un punto arbitrario O los vectores $\overrightarrow{OA} = \boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{OB} = \boldsymbol{b}$ y $\overrightarrow{OC} = \boldsymbol{c}$ y construyamos el paralelepípedo para

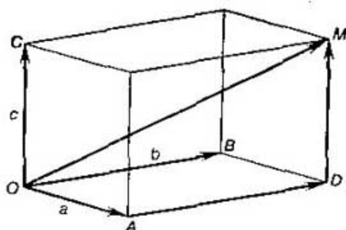


Fig. 28

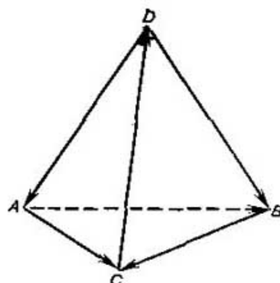


Fig. 29

el cual $[OA]$, $[OB]$ y $[OC]$ sirven de aristas. Sea que $[OM]$ es una diagonal de esto paralelepípedo. Puesto que $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{AD}$ y $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{DM}$

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DM} = \overrightarrow{OM},$$

es decir, $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} = \overrightarrow{OM}$.

Así pues, *la suma de tres vectores no coplanares es igual al vector representado por medio de una diagonal dirigida del paralelepípedo, construido sobre estos vectores.*

Problema. Dar ejemplos de las aristas de la pirámide triangular $ABCD$ que representan: a) dos vectores colineales; b) tres vectores coplanares; c) tres vectores no coplanares.

△ Examinemos la imagen de una pirámide (fig. 29). Utilizando las definiciones de los vectores colineales y coplanares obtendremos:

a) ningún par de aristas distintas de la pirámide puede representar los vectores colineales, ya que entre ellas no hay aristas recíprocamente paralelas;

b) las aristas AC, CB, BA (o las aristas AD, DC y AC) representan tres vectores coplanares (por ejemplo, los vectores $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BC}$);

c) las aristas DA, DC y DB representan tres vectores no coplanares (por ejemplo, los vectores $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DB}$). ▲

§ 10. Desarrollo del vector en tres vectores no coplanares

Teorema. *Cualquier vector* $\boldsymbol{m}$ *puede ser representado, además, de un modo único, en forma de una combinación lineal de cualesquiera tres vectores no coplanares* $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{c}$:

$$\boldsymbol{m} = x\boldsymbol{a} + y\boldsymbol{b} + z\boldsymbol{c}. \qquad (1)$$

□ Ante todo señalemos, que ningún par de vectores de los vectores $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ es colineal; de lo contrario, los vectores

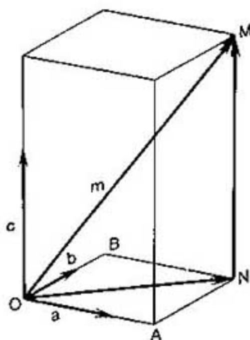


Fig. 30

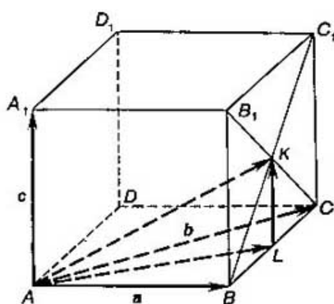


Fig. 31

$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ serían coplanares. Por lo tanto, si el vector $\boldsymbol{m}$ es coplanar con cualquiera de los dos vectores (por ejemplo, con $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$), entonces $\boldsymbol{m} = x\boldsymbol{a} + y\boldsymbol{b}$ (§ 8) y, por consiguiente,

$$\boldsymbol{m} = x\boldsymbol{a} + y\boldsymbol{b} + 0 \cdot \boldsymbol{c},$$

es decir, en este caso el teorema está demostrado.

Sea que el vector $\boldsymbol{m}$ no es coplanar con ningún par de vectores de los vectores $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ (fig. 30). Reduzcamos todos los vectores al origen común O y tracemos a través del punto M (el extremo del segmento dirigido que expresa el vector $\overrightarrow{OM} = \boldsymbol{m}$) una recta paralela al vector $\boldsymbol{c}$. Dicha recta cortará el plano OAB en cierto punto N. Claro está, que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{NM}$.

Según la propiedad de los vectores colineales $\overrightarrow{NM} = z\boldsymbol{c}$. Según el teorema del desarrollo del vector en dos vectores no colineales existen tales números x, y, que $ON = x\boldsymbol{a} + y\boldsymbol{b}$.
Así pues,

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{NM} = x\boldsymbol{a} + y\boldsymbol{b} + z\boldsymbol{c}.$$

La unicidad del desarrollo del vector $\boldsymbol{m}$ en los vectores $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{c}$ se demuestra de una manera análoga a como fue hecho en el teorema del desarrollo del vector en dos vectores no colineales (§ 8). ■

Se denomina *base del espacio* cualesquiera tres vectores no coplanares, tomados en un orden determinado.

Supongamos que $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ y $\boldsymbol{e}_3$ son cierta base y $\boldsymbol{a}$, un vector arbitrario. Entonces, según el teorema que acabamos de demostrar, existen tres números x, y, z tales que

$$\boldsymbol{a} = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2 + z\boldsymbol{e}_3.$$

Los números x, y y z se denominan *coordenadas del vector $\boldsymbol{a}$ en la base dada*. En este caso se escribe $\boldsymbol{a} = (x;\ y;\ z)$.

Problema 1. Se da el cubo $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Desarrollar el vector $\overrightarrow{AK}$, donde K es el centro de la cara BCC_1B_1, en los vectores $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{AB}$, $\boldsymbol{b} = \overrightarrow{AC}$, $\boldsymbol{c} = \overrightarrow{AA_1}$ (fig. 31).

△ Del triángulo AKL tenemos $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AL} + \overrightarrow{LK}$, pero

$$\overrightarrow{AL} = \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{2} = \frac{\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}}{2}, \quad \text{y} \quad \overrightarrow{LK} = \frac{\overrightarrow{AA_1}}{2} = \frac{\boldsymbol{c}}{2}.$$

Por consiguiente,

$$\overrightarrow{AK} = \frac{\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}}{2} + \frac{\boldsymbol{c}}{2} = \frac{1}{2}\boldsymbol{a} + \frac{1}{2}\boldsymbol{b} + \frac{1}{2}\boldsymbol{c}. \ ▲$$

Problema 2. Sea que los vectores $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{DC}$ representados por las respectivas aristas dirigidas de la pirámide

triangular $ABCD$, forman una base. Hállense las coordenadas del vector $\overrightarrow{AB}$ en esta base.

△ Hagamos uso de la figura 29. Designando $\overrightarrow{DA} = \boldsymbol{e}_1$, $\overrightarrow{DB} = \boldsymbol{e}_2$, $\overrightarrow{DC} = \boldsymbol{e}_3$, obtendremos $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DA} = -\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2$ ó $\overrightarrow{AB} = -1 \cdot \boldsymbol{e}_1 + 1 \cdot \boldsymbol{e}_2 + 0 \cdot \boldsymbol{e}_3$, de donde $\overrightarrow{AB} = (-1;\ 1;\ 0)$. ▲

§ 11. Operaciones con los vectores definidos por sus coordenadas

Si los vectores están definidos por sus coordenadas en la base $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$, las operaciones con ellos se cumplen según las siguientes reglas:

1. En caso de adicionar dos (o mayor número) vectores sus respectivas coordenadas se suman:
$(x_1;\ y_1;\ z_1) + (x_2;\ y_2;\ z_2) = (x_1 + x_2;\ y_1 + y_2;\ z_1 + z_2)$.
□ Efectivamente, para dos vectores $(x_1;\ y_1;\ z_1)$ y $(x_2;\ y_2;\ z_2)$ tenemos

$$(x_1;\ y_1;\ z_1) + (x_2;\ y_2;\ z_2) = (x_1 e_1 + y_1 e_2 + z_1 e_3) + \\ + (x_2 e_1 + y_2 e_2 + z_2 e_3) = (x_1 + x_2)\, e_1 + \\ + (y_1 + y_2)\, e_2 + (z_1 + z_2)\, e_3 = \\ = (x_1 + x_2;\ ;y_1 + y_2;\ z_1 + z_2).$$

Para la suma de tres o mayor número de vectores la demostración se realiza de manera análoga. ■

2. En caso de sustraer los vectores sus coordenadas respectivas se sustraen:
$(x_1;\ y_1;\ z_1) - (x_2;\ y_2;\ z_2) = (x_1 - x_2;\ y_1 - y_2;\ z_1 - z_2)$.
Hágase la demostración de una manera independiente.

3. En caso de multiplicar el vector por un número todas sus coordenadas se multiplican por este número.
□ De hecho, para el vector $(x_1;\ y_1;\ z_1)$ y el número λ tenemos

$$\lambda\,(x_1;\ y_1;\ z_1) = \lambda\,(x_1 e_1 + y_1 e_2 + z_1 e_3) = \\ = (\lambda x_1)\, e_1 + (\lambda y_1)\, e_2 + (\lambda z_1)\, e_3 = (\lambda x_1;\ \lambda y_1;\ \lambda z_1).$$ ■

Problema. Hállense las coordenadas de los vectores $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$; $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$; $5\boldsymbol{a}$; $3\boldsymbol{b} - \frac{\boldsymbol{a}}{2}$ por las coordenadas de los vectores $\boldsymbol{a} = (-4;\ 6;\ 0)$, $\boldsymbol{b} = (1;\ -1;\ 7)$.

△ Utilizando las reglas 1, 2 y 3 obtenemos:
$a+b=(-3;\ 5;\ 7)$; $a-b=(-5;\ 7;\ -7)$; $5a=$
$=(-20;\ 30;\ 0)$; $3b-\frac{a}{2}=(5;\ -6;\ 21)$. ▲

§ 12. Sistema cartesiano de coordenadas

Sea que en el espacio se dan dos puntos arbitrarios distintos O y M y supongamos que uno de ellos, por ejemplo, el punto O, está elegido como punto de origen. Entonces el



Fig. 32

vector $\overrightarrow{OM}$ se denomina *radio vector* del punto M respecto al punto O (fig. 32).

Sea que en el espacio se da el punto O y cierta base e_1, e_2, e_3. El conjunto de esta base y el punto O se denomina

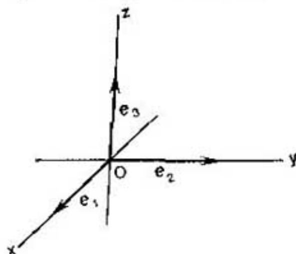


Fig. 33

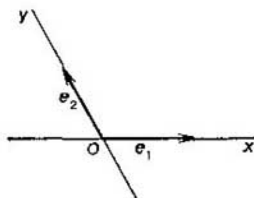


Fig. 34

sistema cartesiano de las coordenadas O, e_1, e_2, e_3. El punto O se denomina *origen de coordenadas*.

Si a través del punto O se trazan las rectas en direcciones definidas por los vectores básicos e_1, e_2 y e_3, entonces las rectas obtenidas se denominan ejes de coordenadas (fig. 33);

la recta Ox, *eje de abscisas*, la recta Oy, *eje de ordenadas* y la recta Oz, *eje de z-coordenadas*.

Las coordenadas del radio vector del punto M se denominan coordenadas de este punto en el sistema de coordenadas dado (x es la abscisa, y, la ordenada, z, la z-coordenada).

Análogamente se determina el sistema cartesiano de coordenadas O, e_1, e_2 en el plano (este es un punto arbitrario fijado O y cierta base e_1, e_2 en el plano) (fig. 34).

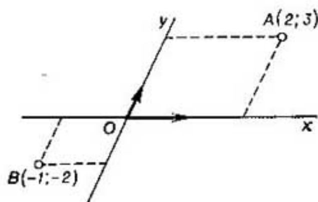


Fig. 35

Las coordenadas del punto M se escriben por lo común al lado de la letra que lo denotan: $M(x;\ y)$ en el plano y $M(x;\ y;\ z)$ en el espacio.

Es evidente, que un sistema cartesiano de coordenadas en el espacio permite establecer una correspondencia biunívoca entre los puntos del espacio y las ternas de números ordenadas, y en el plano, una correspondencia biunívoca entre los puntos del plano y los pares de números ordenados.

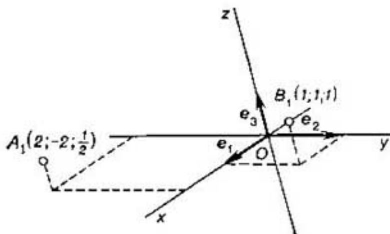


Fig. 36

Por ejemplo, al punto A (fig. 35) le corresponde el par ordenado de los números (2; 3); al punto A_1 (fig. 36), la terna ordenada de los números $\left(2;\ -2;\ \frac{1}{2}\right)$. Al par ordenado de los números (—1; —2) le corresponde el único punto B del plano (fig. 35) y a la terna ordenada de los números (1; 1; 1), el único punto B_1 del espacio (fig. 36).

Sea que en el sistema de coordenadas O, e_1, e_2, e_3 está definido un cierto vector $\overrightarrow{AB}$ (fig. 37). Entonces, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$. Supongamos que las coordenadas de los puntos A y B son respectivamente iguales a $(x_1;\ y_1;\ z_1)$ y $(x_2;$

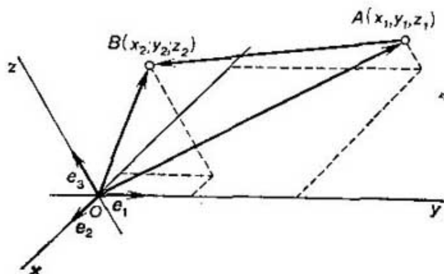


Fig. 37

$y_2;\ z_2)$. Entonces, según la propiedad de sustracción de los vectores, definidos por sus coordenadas, obtenemos

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1;\ y_2 - y_1;\ z_2 - z_1).$$

De esta forma, para hallar las coordenadas de cierto vector, es suficiente sustraer de las coordenadas de su extremo las coordenadas homónimas de su origen.

Problema 1. Hállense las coordenadas del vector $\overrightarrow{AB}$, si $A\ (5;\ -7;\ 0{,}5)$ y $B\ (2;\ -1;\ 2{,}5)$.

△ Sea que $\overrightarrow{AB} = (x;\ y;\ z)$. Entonces, $x = 2 - 5 = -3$; $y = -1 - (-7) = 6$; $z = 2{,}5 - 0{,}5 = 2$.

Así pues, $\overrightarrow{AB} = (-3;\ 6;\ 2)$. ▲

Si los vectores e_1, e_2 y e_3 que forman la base, son vectores unitarios perpendiculares de dos en dos, el sistema de coordenadas O, e_1, e_2, e_3 se denomina *sistema cartesiano rectangular de coordenadas en el espacio.*

De forma análoga, si los vectores unitarios básicos e_1 y e_2 son recíprocamente perpendiculares, el sistema de coordenadas O, e_1, e_2 se denomina *sistema cartesiano rectangular de coordenadas en el plano.*

Los vectores unitarios básicos del sistema cartesiano rectangular de coordenadas se denotan comúnmente con las letras $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ y $\boldsymbol{k}$.

El desarrollo del vector $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{OM}$ (fig. 38) del espacio en los vectores $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ y $\boldsymbol{k}$ se escribe en la forma

$$\boldsymbol{a} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}.$$

En este caso se dice que el vector $\boldsymbol{a}$ está desarrollado en

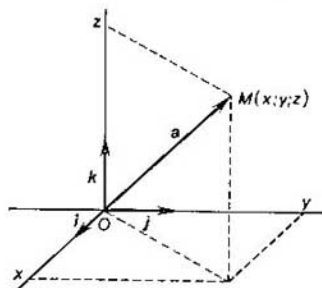


Fig. 38

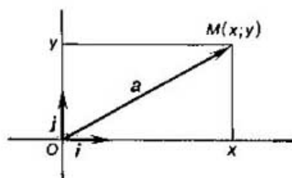


Fig. 39

vectores unitarios (versores) en una base cartesiana rectangular del espacio.

El desarrollo del vector $\boldsymbol{a}$ (fig. 39) en los vectores $\boldsymbol{i}$ y $\boldsymbol{j}$ en una base cartesiana rectangular del plano se escribe en la forma

$$\boldsymbol{a} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}.$$

En los párrafos 10 y 8 fue demostrado que tal desarrollo del vector es siempre posible y único.

Problema 2. Hállese el desarrollo de los vectores $\overrightarrow{OM_1}$ y $\overrightarrow{M_1N}$ en la base cartesiana rectangular ilustrada en la figura 40 (el punto M_1 es la proyección del punto M sobre el plano xOy).

△ Puesto que el punto M_1 es la proyección del punto M sobre el plano xOy, M_1 (3; 4; 0). Por lo tanto

$$\overrightarrow{OM_1} = 3\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j} + 0\cdot\boldsymbol{k}.$$

Hallemos por ahora las coordenadas del vector $\overrightarrow{M_1N}$ en la base dada: $\overrightarrow{M_1N} = (-4 - 3;\ -3{,}5 - 4;\ 2 - 0)$,

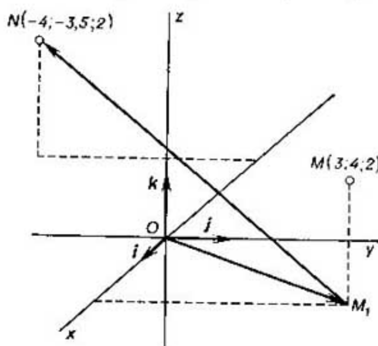


Fig. 40

es decir, $\overrightarrow{M_1N} = (-7;\ -7{,}5;\ 2)$. Por consiguiente, $\overrightarrow{M_1N} = -7i - 7{,}5j + 2k$. ▲

§ 13. Transformación de un sistema cartesiano rectangular de coordenadas en otro

La correspondencia biunívoca entre los puntos del espacio y los pares ordenados de números reales se establece mediante la elección del sistema cartesiano rectangular de coordenadas. Esto quiere decir, que a cada punto del plano le corresponde un único par de números y a cada par ordenado de números reales le corresponde un único punto.

La elección de tal o cual sistema de coordenadas no está limitada por nada y se determina en cada caso concreto sólo por motivos de comodidad. Frecuentemente un mismo conjunto se examina en distintos sistemas de coordenadas. Es evidente, que un mismo punto tiene distintas coordenadas en los diversos sistemas. Un conjunto de puntos (en particular, la circunferencia, la parábola, la recta) se define por distintas ecuaciones en diferentes sistemas de coordenadas.

Aclaremos, cómo se transforman las coordenadas de los puntos del plano en caso de transformación de un sistema de coordenadas en otro.

Sea que en el plano se dan dos sistemas rectangulares de coordenadas: O, $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ y O', $\boldsymbol{i}'$, $\boldsymbol{j}'$ (fig. 41). Convengamos en denominar viejo el primer sistema, que tiene como origen el punto O y como vectores básicos los vectores $\boldsymbol{i}$ y $\boldsymbol{j}$, y nuevo, el segundo sistema, que tiene como origen el punto O' y como vectores básicos los vectores $\boldsymbol{i}'$ y $\boldsymbol{j}'$.

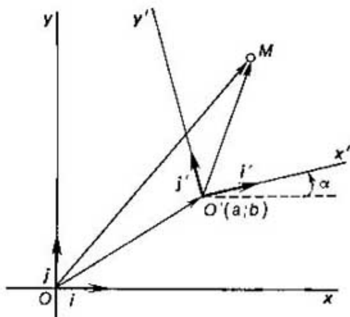


Fig. 41

Consideremos como conocida la posición del nuevo sistema respecto al viejo: sea que el punto O' en el sistema viejo tiene las coordenadas $(a;\ b)$, y el vector $\boldsymbol{i}'$ forma un ángulo α con el vector $\boldsymbol{i}$. El ángulo se cuenta en sentido antihorario.

Examinemos un punto arbitrario M. Designemos como $(x;\ y)$ sus coordenadas en el sistema viejo y como $(x';\ y')$, en el sistema nuevo. Nuestra tarea consiste en establecer una dependencia entre las coordenadas viejas y nuevas del punto M.

Unamos de dos en dos los puntos O y O', O' y M, O y M. Según la regla del triángulo obtenemos

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}. \qquad (1)$$

Desarrollemos en vectores básicos $\boldsymbol{i}$ y $\boldsymbol{j}$, los vectores $\overrightarrow{OM}$ y $\overrightarrow{OO'}$, y en vectores $\boldsymbol{i}'$ y $\boldsymbol{j}'$, el vector $\overrightarrow{O'M}$:

$$\overrightarrow{OM} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}, \quad \overrightarrow{OO'} = a\boldsymbol{i} + b\boldsymbol{j}, \quad \overrightarrow{O'M} = x'\boldsymbol{i}' + y'\boldsymbol{j}'.$$

Ahora se puede escribir la igualdad (1) así:

$$x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} = (a\boldsymbol{i} + b\boldsymbol{j}) + (x'\boldsymbol{i}' + y'\boldsymbol{j}'). \qquad (2)$$

Los vectores básicos nuevos i' y j' se desarrollan en vectores básicos viejos i y j del modo siguiente:

$i' = \cos\alpha i + \operatorname{sen}\alpha j$,

$$j' = \cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) i + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) j = -\operatorname{sen}\alpha i + \cos\alpha j.$$

Sustituyendo las expresiones halladas para i' y j' en la fórmula (2), obtendremos la igualdad vectorial

$$xi + yj = ai + bj + x' (\cos\alpha i + \operatorname{sen}\alpha j) + \\ + y' (-\operatorname{sen}\alpha i + \cos\alpha j),$$

que es equivalente a las igualdades numéricas:

$$\begin{cases} x = a + x' \cos\alpha - y' \operatorname{sen}\alpha, \\ y = b + x' \operatorname{sen}\alpha + y' \cos\alpha. \end{cases} \qquad (3)$$

Las fórmulas (3) ofrecen las expresiones buscadas para las coordenadas viejas x e y del punto a través de sus nuevas coordenadas. A fin de hallar las expresiones para las nuevas coordenadas a través de las viejas, es suficiente resolver el sistema de ecuaciones (3) respecto a las incógnitas x' y y'.

Así pues, cuando se traslada el origen de coordenadas al punto $(a;\ b)$ y se giran los ejes en el ángulo α, las coordenadas de los puntos se transforman según la fórmula (3).

Si cambia solamente el origen de coordenadas, y las direcciones de los ejes quedan invariables, suponiendo $\alpha = 0$ en las fórmulas (3), obtenemos

$$\begin{cases} x = a + x' \\ y = b + y'. \end{cases} \qquad (4)$$

Estas fórmulas se denominan brevemente *fórmulas de traslado*.

Si el origen de coordenadas queda intacto y los ejes giran en el ángulo α suponiendo en las fórmulas (3) $a = b = 0$, obtenemos

$$\begin{cases} x = x' \cos\alpha - y' \operatorname{sen}\alpha, \\ y = x' \operatorname{sen}\alpha + y' \cos\alpha. \end{cases} \qquad (5)$$

Las fórmulas (5) se denominan *fórmulas de giro*.

Problema 1. Sea que las coordenadas del nuevo origen son (2; 3) en el sistema viejo, y las coordenadas del pun-

to A son (4; —1) en el sistema viejo. Hállense las coordenadas del punto A en el sistema viejo, si las direcciones de los ejes quedan invariables.

△ De acuerdo con la fórmulas (4) tenemos

$$\begin{cases} 4 = 2 + x', \\ -1 = 3 + y'. \end{cases}$$

Por consiguiente,

$$\begin{cases} x' = 2, \\ y' = -4. \end{cases}$$

Resultado. A (2; —4). ▲

Problema 2. Sea que las coordenadas del punto P son (—2; 1) en el sistema viejo y (5; 3) en el nuevo sistema, en el cual las direcciones de los ejes son las mismas.

△ Según la fórmula (4) obtenemos

$$\begin{cases} -2 = a + 5, \\ 1 = b + 3, \end{cases}$$

de donde $a = -7$, $b = -2$.

Resultado. (—7; —2). ▲

Problema 3. Las coordenadas del punto A son (4; 2) en el nuevo sistema. Hállense las coordenadas de este punto en el sistema viejo, si el origen de coordenadas quedó invariable, y los ejes de coordenadas del sistema viejo están giradas en el ángulo $\alpha = 45°$.

△ Según las fórmulas (5) hallamos

$$\begin{cases} x = 4\cos 45° - 2\,\mathrm{sen}\,45° = 4\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}, \\ y = 4\,\mathrm{sen}\,45° + 2\cos 45° = 4\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}. \end{cases}$$

Resultado. A ($\sqrt{2}$; $3\sqrt{2}$). ▲

Problema 4. Las coordenadas del punto A son ($2\sqrt{3}$; $-\sqrt{3}$) en el viejo sistema. Hállense las coordenadas de este punto en el nuevo sistema, si el origen de coordenadas del viejo sistema se trasladó al punto (—1; —2), y los ejes están girados en un ángulo $\alpha = 30°$.

△ Según las fórmulas (3) tenemos

$$\begin{cases} 2\sqrt{3} = -1 + x' \cos 30° - y' \operatorname{sen} 30°, \\ -\sqrt{3} = -2 + x' \operatorname{sen} 30° + y' \cos 30°, \end{cases}$$

ó

$$\begin{cases} 2\sqrt{3} = -1 + x' \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - y' \cdot \frac{1}{2}, \\ -\sqrt{3} = -2 + x' \cdot \frac{1}{2} + y' \cdot \frac{3}{2}, \end{cases}$$

ó

$$\begin{cases} \sqrt{3}x' - y' = 4\sqrt{3} + 2, \\ x' + \sqrt{3}\,y' = 4 - 2\sqrt{3}. \end{cases}$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones respecto a x' y y', hallamos: $x' = 4$, $y' = -2$.

Resultado. A (4; —2). ▲

Problema 5. Se da la ecuación de la recta $y = 2x - 6$. Hállese la ecuación de la misma recta en el nuevo sistema de coordenadas, obtenido del viejo sistema mediante el giro de los ejes en un ángulo de $\alpha = 45°$.

△ En este caso las fórmulas de giro tienen la forma

$$\begin{cases} x = x' \cos 45° - y' \operatorname{sen} 45°, \\ y = x' \operatorname{sen} 45° + y' \cos 45°, \end{cases}$$

es decir

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2} x' - \frac{\sqrt{2}}{2} y' = \frac{\sqrt{2}}{2} (x' - y'), \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2} x' + \frac{\sqrt{2}}{2} y' = \frac{\sqrt{2}}{2} (x' + y'). \end{cases}$$

Sustituyendo en la ecuación de la recta $y = 2x - 6$ las variables viejas x y y por las nuevas, obtendremos la ecuación

$$\frac{\sqrt{2}}{2} (x' + y') = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} (x' - y') - 6,$$

que tras las simplificaciones toma la forma

$$y' = \frac{x'}{3} - 2\sqrt{2}. \ ▲$$

§ 14. Sistema polar de coordenadas

Familiaricémonos con un método más de determinación de la posición del punto en el plano por medio de los números, es decir, con el sistema polar de coordenadas.

Examinemos en el plano el eje l con un vector unitario $\boldsymbol{e}$ y con un punto de referencia O (fig. 42).

Sea que M es un punto arbitrario del plano, que no coincide con el punto O. Entonces $\overrightarrow{OM}$ es el radio vector del

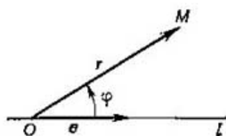


Fig. 42

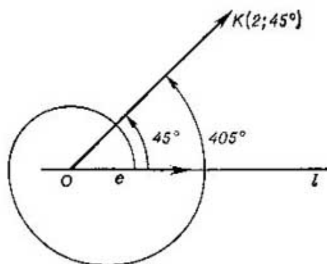


Fig. 43

punto M respecto al punto O. Sea que r es una longitud del vector $\overrightarrow{OM}$, es decir, $|\overrightarrow{OM}| = r$ y φ es el ángulo entre el eje l y el radio vector $\overrightarrow{OM}$. Calculemos el ángulo $\varphi = \widehat{(e; \overrightarrow{OM})}$ desde el eje l en sentido positivo, es decir, en sentido antihorario.

Los números r y φ se denominan *coordenadas polares* del punto M: r es *un radio polar*, φ, *un ángulo polar*.

El eje l se denomina *eje polar* y el punto O, *polo*.

El radio polar del punto O se considera igual a cero, el ángulo polar del punto O no se define.

Si el punto M tiene las coordenadas polares r y φ, entonces se escribe $M(r; \varphi)$. Por ejemplo, el punto K (fig. 43) tiene las coordenadas $r = 2$, $\varphi = 45°$, es decir, $K(2; 45°)$.

Es evidente, que la posición del punto en el plano se define por completo por medio de sus coordenadas polares.

Si $r > 0$ y φ es un número arbitrario, existe un solo punto M tal que

$$|\overrightarrow{OM}| = r \quad \text{y} \quad (\widehat{e; \overrightarrow{OM}}) = \varphi.$$

Si $r = 0$ el punto coincide con el polo.

Es de señalar, que el ángulo polar del punto que no coincide con el polo se define no unívocamente. Por ejemplo, es ángulo polar para el punto K (ver fig. 43) no sólo el ángulo $\varphi = 45°$, sino también el ángulo $\varphi = 405°$ y, en general, cualquier ángulo $\varphi = 45° + 360°\, k$, donde $k \in \mathbf{Z}$.

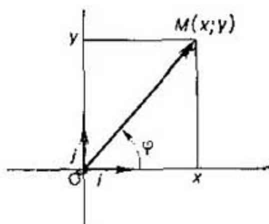


Fig. 44

El ángulo polar de un punto se define con una precisión hasta un sumando, múltiple a 360°. Si $r > 0$, los pares de números $(r;\ \varphi)$ y $(r;\ \varphi + 360°\, k)$, donde $k \in \mathbf{Z}$, definen un mismo punto del plano. Para que la correspondencia entre los puntos del plano (a excepción del polo) y sus coordenadas polares sea biunívoca, al ángulo polar se pone un límite $0 \leqslant \varphi < 360°$.

Establezcamos una relación entre las coordenadas cartesianas polares y rectangulares de un mismo punto M del plano.

Sea que en el plano está definido un sistema cartesiano rectangular de coordenadas O, $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ (fig. 44). Tomemos como origen de coordenadas, o sea, como polo el punto O y como eje polar l, el eje de abscisas. Entonces el rayo $[Oy)$ del eje de ordenadas está orientado bajo un ángulo de 90° respecto al eje l.

Es evidente que las coordenadas cartesianas del punto M se expresan a través de sus coordenadas polares de la manera siguiente:

$$x = r \cos \varphi, \qquad y = r \operatorname{sen} \varphi. \tag{1}$$

Las fórmulas (1) permiten hallar las coordenadas cartesianas rectangulares del punto por sus coordenadas polares. De la fórmula (1) obtenemos

$$x^2 + y^2 = r^2 \cos^2 \varphi + r^2 \operatorname{sen}^2 \varphi = r^2 (\cos^2 \varphi + \operatorname{sen}^2 \varphi) = r^2,$$

y por consiguiente,

$$r=\sqrt{x^2+y^2}. \qquad (2)$$

Si $r \neq 0$ (M no coincide con el punto O), de (1) y (2) se deduce que

$$\cos\varphi=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \operatorname{sen}\varphi=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}. \qquad (3)$$

Las fórmulas (2), (3) permiten pasar de las coordenadas cartesianas rectangulares del punto a sus coordenadas polares.

Problema 1. Hállense las coordenadas del punto $M(-1;\ \sqrt{3})$.

△ Por la fórmula (2) hallamos $r=\sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2}=2$. Según las fórmulas (3) tenemos

$$\cos\varphi=\frac{-1}{2}=-\frac{1}{2}, \quad \operatorname{sen}\varphi=\frac{\sqrt{3}}{2},$$

de donde $\varphi=120°$. Así pues, $M(2;\ 120°)$. ▲

Problema 2. Hállense las coordenadas rectangulares cartesianas del punto $M(4;\ 135°)$.

△ Según las fórmulas (1) tenemos

$$x=4\cdot\cos 135°=4\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-2\sqrt{2},$$

$$y=4\cdot\operatorname{sen} 135°=4\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{2}.$$

De esta forma, $M(-2\sqrt{2};\ 2\sqrt{2})$. ▲

§ 15. Longitud del vector

Del curso de geometría para la secundaria básica se sabe que la distancia entre los puntos A y B situados en una recta (eje) de coordenadas se calcula según la fórmula

$$d(A,B)= \quad |AB|=|x_B-x_A|,$$

donde x_A y x_B son las coordenadas de los puntos A y B.

Supongamos que dos puntos $A(x_1; y_1)$ y $B(x_2; y_2)$ (fig. 45) se dan en un plano, en el cual se elige un sistema

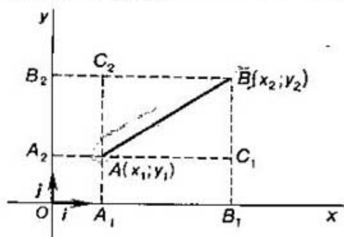


Fig. 45

rectangular de coordenadas O, $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$. Se requiere hallar la longitud del segmento $[AB]$.

Según el teorema de Pitágoras del triángulo ABC_1 hallamos $|AB|^2 = |AC_1|^2 + |C_1B|^2$, pero puesto que

$$|AC_1| = |A_1B_1| = |x_2 - x_1|$$

y

$$|C_1B| = |A_2B_2| = |y_2 - y_1|,$$

entonces $|AB|^2 = |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2$,

y, por consiguiente,

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \qquad (1)$$

Si el segmento AB es paralelo al eje de las abscisas, entonces $y_1 = y_2$ (fig. 46) y la longitud del segmento AB

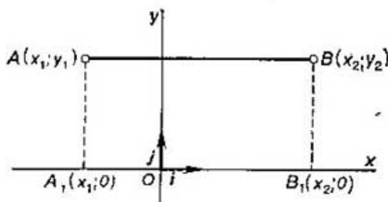


Fig. 46

es igual a la longitud del segmento A_1B_1:

$$|AB| = |A_1B_1| = |x_2 - x_1|.$$

Si el segmento AB es paralelo al eje de ordenadas Oy (fig. 47), entonces

$$|AB| = |y_2 - y_1|.$$

Las últimas dos fórmulas son casos particulares de la fórmula (1).

Así pues, *la longitud del segmento en el plano es igual a la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de las diferencias de las coordenadas homónimas de sus extremos.*

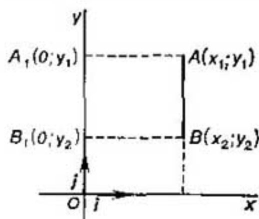


Fig. 47

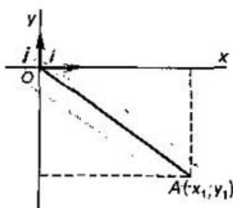


Fig. 48

Si uno de los puntos, por ejemplo B, coincide con el origen de coordenadas (fig. 48), la fórmula (1) se simplifica y toma la forma

$$|AO| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}.$$

Sea que los puntos A y B se encuentran en el espacio:

$$A\ (x_1;\ y_1;\ z_1) \quad \text{y} \quad B\ (x_2;\ y_2;\ z_2).$$

Construyamos un paralelepípedo rectangular $ACB_1DA_1C_1BD_1$, en el cual los puntos A y B servirán de extremos de su diagonal (fig. 49). Entonces, según el teorema de Pitágoras de $\triangle ADB_1$ y $\triangle AB_1B$ se desprende, que $|AB| = \sqrt{|AD|^2 + |DB_1|^2 + |B_1B|^2}$. Expresando $|AD|$, $|DB_1|$ y $|B_1B|$ en coordenadas, obtendremos

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \qquad (2)$$

Está claro, que si $z_1 = z_2 = 0$ la fórmula (2) se reduce a la fórmula (1); en este caso el segmento AB pertenece al plano xOy.

Recordemos que la longitud del vector $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{AB}$ es igual a la longitud del segmento AB.

Por lo tanto, utilizando las fórmulas (1) y (2), se puede expresar la longitud del vector $a = \overrightarrow{AB}$ en el plano y en el espacio por medio de las coordenadas de los extremos de la manera siguiente:

$$|\overrightarrow{AB}| = |AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}, \qquad (3)$$

$$|\overrightarrow{AB}| = |AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \qquad (4)$$

Sea que el vector $a = (x;\ y;\ z)$ está definido en un sistema cartesiano rectangular de coordenadas. Entonces, las

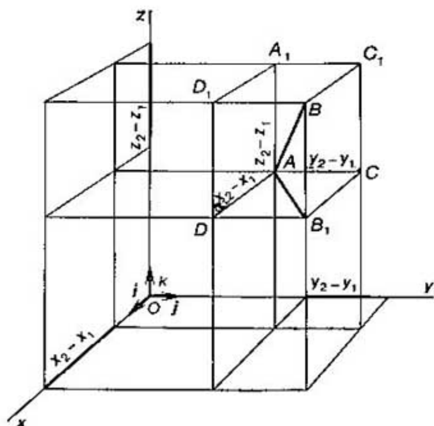


Fig. 49

coordenadas del vector $a = \overrightarrow{AB}$ se expresan por medio de las coordenadas de los puntos $A(x_1;\ y_1;\ z_1)$ y $B(x_2;\ y_2;\ z_2)$ de la manera siguiente (§ 12):

$$x = x_2 - x_1, \quad y = y_2 - y_1, \quad z = z_2 - z_1.$$

De la fórmula (4) obtendremos la expresión de la longitud del vector $a = (x;\ y;\ z)$ por medio de sus coordenadas:

$$|a| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \qquad (5)$$

Es evidente, que para el plano la fórmula (5) tomará la forma

$$|a| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Problema 1. Hállese la longitud del vector $\overrightarrow{AB}$ si A (4; 1), B (7; 5).

△ Según la fórmula (3) hallamos

$$|\overrightarrow{AB}| = |AB| = \sqrt{(7-4)^2 + (5-1)^2} = 5. \ ▲$$

Problema 2. Hállese la longitud del vector $\overrightarrow{AB}$ si A (3; 5; 1), B (5; 6; 3).

△ Utilizando la fórmula (4) hallamos

$$|\overrightarrow{AB}| = |AB| = \sqrt{(5-3)^2 + (6-5)^2 + (3-1)^2} = 3. \ ▲$$

Problema 3. Hállese la longitud del vector $a = (2; 3; -6)$.

△ Según la fórmula (5) obtenemos

$$|a| = \sqrt{2^2 + 3^2 - (-6)^2} = 7. \ ▲$$

debe ser $+ (-6)^2$

§ 16. Proyección del vector sobre el eje. Propiedades del vector

Sea que en el plano o en el espacio se dan el eje l con el vector unitario e y el vector arbitrario a.

Se denomina *proyección ortogonal* (o simplemente proyección) del vector a sobre el eje l, el número igual al producto de la longitud del vector a por el coseno del ángulo entre los vectores e y a.

La proyección del vector a sobre el eje l se designa con el símbolo $\mathrm{pr}_l\, a$ o $\mathrm{pr}_e\, a$.

Así pues, según la definición

$$\mathrm{pr}_l\, a = |a| \cos(\widehat{e; a}).$$

Tracemos el vector a desde el punto O del eje l.

Si el ángulo entre los vectores e y a es agudo (fig. 50, a), la proyección del vector a sobre el eje l es igual a la longitud del segmento OA_1, donde A_1 es la proyección del punto A sobre la recta l.

Efectivamente,

$$\mathrm{pr}_l\, a = |a| \cos(\widehat{e; a}) = |OA| \cos \widehat{AOA_1} = |OA_1|.$$

Si el ángulo entre los vectores $\boldsymbol{e}$ y $\boldsymbol{a}$ es obtuso (fig. 50, b), la proyección del vector $\boldsymbol{a}$ sobre el eje l es igual a la longitud del segmento OA_1 tomada con signo menos.

En efecto,

$$\mathrm{pr}_l\, \boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}| \cos(\widehat{\boldsymbol{e}; \boldsymbol{a}}) = |OA| \cos \widehat{BOA} =$$
$$= -|OA| \cos \widehat{A_1OA} = -|OA_1|.$$

Si el vector $\boldsymbol{a}$ es perpendicular al eje l, $(\widehat{\boldsymbol{e}; \boldsymbol{a}}) = 90°$ y $\mathrm{pr}_l\, \boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}| \cos 90° = 0$.

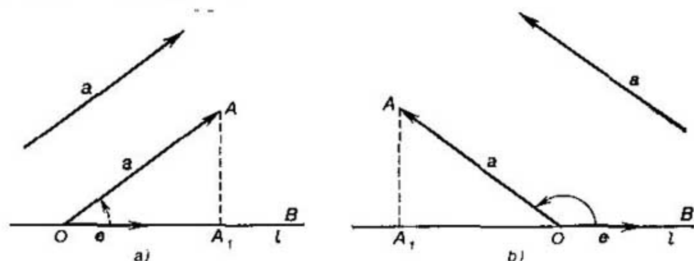


Fig. 50

Examinemos dos propiedades importantes de la proyección del vector sobre el eje.

Propiedad 1. Para cualesquiera vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ es válida la igualdad

$$\mathrm{pr}_l\, (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \mathrm{pr}_l\, \boldsymbol{a} + \mathrm{pr}_l\, \boldsymbol{b},$$

donde l es un eje arbitrario.

Esta propiedad permite sustituir la proyección de la suma de los vectores por la suma de sus proyecciones y viceversa.

Propiedad 2. Para cualquier vector $\boldsymbol{a}$ y cualquier número k es válida la igualdad

$$\mathrm{pr}_l\, k\boldsymbol{a} = k\, \mathrm{pr}_l\, \boldsymbol{a},$$

donde l es un eje arbitrario.

Esta propiedad permite sacar e introducir el factor numérico del signo de proyección.

Estas propiedades son válidas debido a las reglas de operaciones con los vectores expresados por sus coordenadas.

□ En efecto, sea que l es un eje arbitrario que tiene un punto de referencia O y un vector unitario $\boldsymbol{e}$. Introduzcamos un sistema rectangular de coordenadas de la manera siguiente (fig. 51). Admitamos como origen de coordenadas el pun-

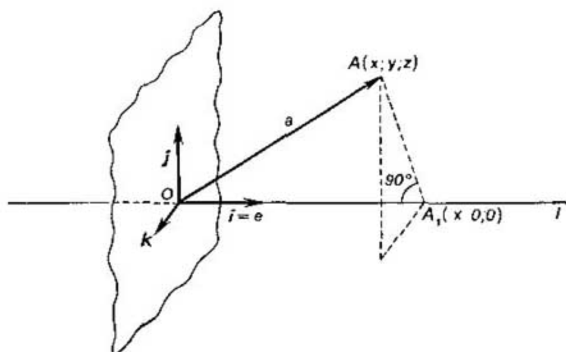


Fig. 51

to O, y el vector $\boldsymbol{e}$, como el primer vector básico ($\boldsymbol{i} = \boldsymbol{e}$). En calidad de otros vectores básicos $\boldsymbol{j}$ y $\boldsymbol{k}$, tomemos cualesquiera dos vectores unitarios perpendiculares entre sí, situados en un plano perpendicular al eje l.

Sea que el vector $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{OA}$ tiene las coordenadas x, y, z. Entonces, según la definición de proyección

$$\text{pr}_l\, \boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}| \cos(\widehat{\boldsymbol{i}; \boldsymbol{a}}).$$

Pero $|\boldsymbol{a}| \cos(\widehat{\boldsymbol{i}; \boldsymbol{a}}) = x$, es decir, la proyección de cualquier vector sobre el eje l es igual a la abscisa de este vector en una base elegida por nosotros.

Puesto que la abscisa de la suma de vectores es igual a la suma de las abscisas de los vectores sumandos (§ 11), la proyección de la suma de los vectores sobre el eje l es igual a la suma de las proyecciones de estos vectores sobre el eje l.

Exactamente así, la proyección del producto del vector por un número es igual al producto de este número por la proyección del vector, ya que al multiplicar el vector por un número su abscisa se multiplica por este número. ■

§ 17. Producto escalar de dos vectores

En física, cuando hay un movimiento rectilíneo de un punto material de la posición B a la posición C (fig. 52), el trabajo A de la fuerza constante F se calcula según la fórmula

$$A = |\boldsymbol{F}| \cdot |\overrightarrow{BC}| \cos(\widehat{\boldsymbol{F}; \overrightarrow{BC}}).$$

Esta fórmula asigna al vector de fuerza $\boldsymbol{F}$ y al vector de desplazamiento $\overrightarrow{BC}$ una variable escalar, el trabajo. La magnitud A se denomina producto escalar de los vectores $\boldsymbol{F}$ y $\overrightarrow{BC}$. El producto escalar puede ser definido para dos vectores cualesquiera. Se utiliza ampliamente en física y matemática.

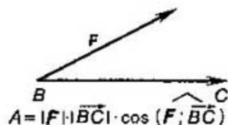


Fig. 52

Se denomina *producto escalar* de dos vectores no nulos un número igual al producto de las longitudes de estos vectores por el coseno del ángulo entre ellos. Si por lo menos de dos vectores uno es nulo, el producto escalar de estos vectores se toma igual a cero.

El producto escalar de los vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ se designa $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$. Así pues, según la definición

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}| \cos(\widehat{\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b}}). \quad (1)$$

Si $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$, entonces el producto escalar toma la forma $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a}$ y se denomina cuadrado escalar del vector $\boldsymbol{a}$; se designa con el símbolo $\boldsymbol{a}^2$. Es evidente que $\boldsymbol{a}^2 = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}|^2$.

Como se sabe (ver § 16), la proyección del vector $\boldsymbol{b}$ sobre un eje, cuya dirección coincide con la dirección del vector $\boldsymbol{a}$ se expresa por la fórmula

$$\text{pr}_{\boldsymbol{a}} \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{b}| \cos(\widehat{\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b}}). \quad (2)$$

Utilizando las fórmulas (1) y (2) se puede escribir

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}|\ \mathrm{pr}_{\boldsymbol{a}}\, \boldsymbol{b}. \qquad (2)$$

De este modo, el producto escalar de dos vectores es igual al producto de la longitud de uno de ellos y de la proyección del segundo por la dirección del primero.

Análogamente se obtiene la fórmula $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = |\boldsymbol{b}|\ \mathrm{pr}_{\boldsymbol{b}}\, \boldsymbol{a}$.

Problema 1. Se sabe que $|\boldsymbol{a}| = 2$, $|\boldsymbol{b}| = \frac{1}{3}$, $\widehat{(\boldsymbol{a};\ \boldsymbol{b})} = 150°$. Hallar $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$.

△ Según la fórmula (1) hallamos

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos\widehat{(\boldsymbol{a};\ \boldsymbol{b})} = 2\cdot\frac{1}{3}\cdot\cos 150° = -\frac{2\sqrt{3}}{9}. \ ▲$$

Problema 2. Hallar todos los productos escalares posibles de los vectores básicos $\boldsymbol{i}$ y $\boldsymbol{j}$ de un sistema cartesiano de coordenadas en el plano.

△ Según la definición del producto escalar

$$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j} = |\boldsymbol{i}|\cdot|\boldsymbol{j}|\cos 90° = 1\cdot 1\cdot 0 = 0,$$
$$\boldsymbol{i}^2 = \boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i} = |\boldsymbol{i}|\cdot|\boldsymbol{i}|\cos 0° = 1\cdot 1\cdot 1 = 1.$$

Análogamente $\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i} = 0$, $\boldsymbol{j}^2 = 1$. ▲

Problema 3. ¿Qué signo tiene el producto escalar de los vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$, si $90° < \widehat{(\boldsymbol{a};\ \boldsymbol{b})} \leqslant 180°$?

△ Puesto que en la fórmula $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos\widehat{(\boldsymbol{a};\ \boldsymbol{b})}$ los números $|\boldsymbol{a}|$ y $|\boldsymbol{b}|$ son no negativos, el signo de $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ depende del signo del coseno. En el intervalo $]90°; 180°] \times \cos\widehat{(\boldsymbol{a};\ \boldsymbol{b})} < 0$, por lo tanto, $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} < 0$. ▲

Problema 4. ¿En qué intervalo se encuentra la magnitud del ángulo entre los vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$, si $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} > 0$?

△ Puesto que $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} > 0$, $|\boldsymbol{a}| \neq 0$, $|\boldsymbol{b}| \neq 0$ y $\cos\widehat{(\boldsymbol{a};\ \boldsymbol{b})} > 0$. De aquí que $\widehat{(\boldsymbol{a};\ \boldsymbol{b})} \in [0°; 90°[$. ▲

§ 18. Propiedades del producto escalar de los vectores

1. La multiplicación escalar de los vectores posee propiedad conmutativa:

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}. \qquad (1)$$

□ Puesto que $\widehat{(a;\ b)} = \widehat{(b;\ a)}$ y $|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{b}|\cdot|\boldsymbol{a}|$, entonces $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos\widehat{(a;\ b)} = |\boldsymbol{b}|\cdot|\boldsymbol{a}|\cos\widehat{(b;\ a)} = \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$.

Si $\boldsymbol{a} = 0$ o $\boldsymbol{b} = 0$, entonces según la definición del producto escalar $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = 0$ y $\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a} = 0$, es decir, $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$. ■

2. La multiplicación escalar de los vectores posee propiedad asociativa respecto a la multiplicación del vector por un número:

$$(k\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b} = k\,(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}). \qquad (2)$$

□ Designemos $\widehat{(a;\ b)} = \varphi$ y $\widehat{(ka;\ b)} = \varphi_1$.

Si $k > 0$, $\widehat{(a;\ b)} = \widehat{(ka;\ b)}$, es decir, $\varphi = \varphi_1$, y entonces $(k\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b} = |k\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos\varphi_1 = k\,|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos\varphi = k\,(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$.

Si $k < 0$, $k\boldsymbol{a} \uparrow\downarrow \boldsymbol{a}$ y $\varphi_1 = 180° - \varphi$ y entonces, $(k\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b} = |k\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos\varphi_1 = |k|\cdot|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos(180° - \varphi) = -k\cdot|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\,(-\cos\varphi) = k\,|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos\varphi = k\,(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$.

Si $k = 0$ o $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$ o $\boldsymbol{b} = 0$, entonces $(k\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b} = 0$ y $k\,(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}) = 0$, y por lo tanto, $(k\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b} = k\,(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$. ■

3. La multiplicación escalar de vectores posee propiedad distributiva respecto a la adición de vectores

$$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}. \qquad (3)$$

□ Si $\boldsymbol{a} = 0$, la propiedad (3) es evidente.

Sea que $\boldsymbol{a} \neq 0$, entonces, $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = |\boldsymbol{a}|\cdot \mathrm{pr}_a\,(\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = |\boldsymbol{a}|\,(\mathrm{pr}_a\,\boldsymbol{b} + \mathrm{pr}_a\,\boldsymbol{c}) = |\boldsymbol{a}|\cdot\mathrm{pr}_a\,\boldsymbol{b} + |\boldsymbol{a}|\cdot\mathrm{pr}_a\,\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$.

En el curso de la demostración fueron utilizadas las conocidas propiedades de la proyección del vector sobre el eje (§16). ■

Observemos que de (1) y (3) se deduce la fórmula

$$(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c} + \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}. \qquad (4)$$

La semejanza de las propiedades del producto escalar de los vectores con las propiedades del producto de los números reales permite realizar fácilmente los cálculos y transformaciones con los productos escalares.

Problema. Demostrar la identidad

$$(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})^2 = \boldsymbol{a}^2 + 2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} + \boldsymbol{b}^2.$$

△ Utilizando las propiedades (1)—(4) del producto escalar obtenemos

$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{b}=$ $=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2=\boldsymbol{a}^2+$ $+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2$. ▲

Teorema. *Para que dos vectores no nulos sean perpendiculares es necesario y suficiente que su producto escalar sea igual a cero*:

$$(\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0},\ \boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0},\ \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0)\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}. \qquad (5)$$

□ **Necesidad.** Sea que $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$. Entonces,

$$\varphi=\widehat{(\boldsymbol{a};\ \boldsymbol{b})}=90^\circ \quad \text{y} \quad \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cdot\cos 90^\circ=0.$$

Suficiencia Sea que $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$, $\boldsymbol{a}\neq 0$, $\boldsymbol{b}\neq 0$. Puesto que $\boldsymbol{a}\neq 0$, $\boldsymbol{b}\neq 0$, entonces $|\boldsymbol{a}|\neq 0$, $|\boldsymbol{b}|\neq 0$, y ya que $|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cdot\cos\varphi=0$, $\cos\varphi=0$ y, por consiguiente, $\varphi=$ $=90^\circ$, es decir, $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$. ■

§ 19. Producto escalar de vectores dados por sus coordenadas

Sea que en el plano se tiene cierto sistema cartesiano rectangular de coordenadas y se dan los vectores $\boldsymbol{a}=(x_1;\ y_1)$ y $\boldsymbol{b}=(x_2;\ y_2)$. Puesto que

$$\boldsymbol{a}=x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}, \quad \boldsymbol{b}=x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j},$$

entonces, utilizando las respectivas propiedades de la multiplicación escalar de vectores obtenemos

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=(x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j})\cdot(x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j})=$$
$$=(x_1x_2)\,\boldsymbol{i}^2+(x_1y_2)\,\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}+(y_1x_2)\,\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i}+(y_1y_2)\,\boldsymbol{j}^2.$$

Es evidente que $\boldsymbol{i}^2=\boldsymbol{j}^2=1$ y $\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i}=0$, por lo tanto,

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=x_1x_2+y_1y_2. \qquad (1)$$

Sea que ahora en el espacio se tiene cierto sistema cartesiano rectangular de coordenadas y se dan los vectores

$$\boldsymbol{a}=(x_1;\ y_1;\ z_1), \quad \boldsymbol{b}=(x_2;\ y_2;\ z_2).$$

Análogamente a lo expuesto obtenemos

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2. \qquad (2)$$

Así pues, *el producto escalar de dos vectores es igual a la suma de los productos de las coordenadas homónimas de estos vectores.*

Problema 1. Calcúlese $a \cdot b$, si $a = 2i + 3j$, $b = -5i + j$.
△ $a \cdot b = (2i + 3j) \cdot (-5i + j) = 2 \cdot (-5) + 3 \cdot 1 = -7$. ▲

Problema 2. Calcúlese $a \cdot b$, si $a = (2; -3; 4)$, $b = (5; 7; -1)$.

△ $a \cdot b = 2 \cdot 5 + (-3) \cdot 7 + 4 \cdot (-1) = -15$. ▲

Problema 3. Hállese la longitud del vector $a = (x; y; z)$.
△ Utilizando la fórmula (2) obtendremos

$$a \cdot a = xx + yy + zz = x^2 + y^2 + z^2.$$

Por consiguiente,

$$|a| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \ ▲$$

§ 20. Cálculo del ángulo entre dos vectores

Según la definición del producto escalar tenemos que

$$a \cdot b = |a| \cdot |b| \cos(\widehat{a; b}).$$

Por lo tanto, si $a \neq 0$ y $b \neq 0$

$$\cos(\widehat{a; b}) = \frac{a \cdot b}{|a| \cdot |b|}, \qquad (1)$$

es decir, *el coseno del ángulo entre los vectores no nulos a y b es igual al producto escalar de estos vectores, dividido por el producto de sus longitudes.*

Supongamos que en el espacio hay un sistema cartesiano rectangular de coordenadas y se dan los vectores $a = (x_1; y_1; z_1)$ y $b = (x_2; y_2; z_2)$. Entonces, como es sabido (ver § 19)

$$a \cdot b = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2,$$
$$|a| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}, \quad |b| = \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2},$$

y, por lo tanto, utilizando la igualdad (1) obtendremos la fórmula

$$\cos(\widehat{a; b}) = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}. \qquad (2)$$

Esta fórmula permite calcular el coseno del ángulo entre los vectores a y b, según las coordenadas de estos vectores.

Si los vectores $\boldsymbol{a} = (x_1;\ y_1)$ y $\boldsymbol{b} = (x_2;\ y_2)$ se dan en un sistema cartesiano rectangular de coordenadas en el plano, entonces el coseno del ángulo entre ellos se calcula según la fórmula

$$\cos(\widehat{\boldsymbol{a};\ \boldsymbol{b}}) = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2}}. \tag{3}$$

Problema 1. Se dan dos vectores: $\boldsymbol{a} = (3;\ 4)$ y $\boldsymbol{b} = (4;\ 3)$. Hallar el ángulo entre ellos.

△ Sustituyendo las coordenadas de los vectores en la fórmula (3), obtenemos

$$\cos(\widehat{\boldsymbol{a};\ \boldsymbol{b}}) = \frac{3\cdot4+4\cdot3}{\sqrt{3^2+4^2}\cdot\sqrt{4^2+3^2}} = \frac{24}{25},$$

de donde (según la tabla) $(\widehat{\boldsymbol{a};\ \boldsymbol{b}}) \approx 16°$. ▲

Problema 2. Hállese el coseno del ángulo entre los vectores

$$\boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}, \quad \boldsymbol{b} = \boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}.$$

△ Utilizando la fórmula (2) obtendremos

$$\cos(\widehat{\boldsymbol{a};\ \boldsymbol{b}}) = \frac{2\cdot1+2\cdot(-2)+(-1)\cdot2}{\sqrt{2^2+2^2+(-1)^2}\cdot\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}} = -\frac{4}{9}. \ ▲$$

§ 21. Producto vectorial de dos vectores y sus propiedades

En física el momento de fuerza $\boldsymbol{F}$ respecto al punto O se representa por el vector $\overrightarrow{OM}$, perpendicular al plano en

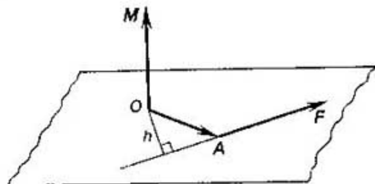


Fig. 53

el cual está situado el punto O y el vector $\boldsymbol{F}$ (fig. 53). La longitud del vector $\overrightarrow{OM}$ se define como el producto de la

longitud del vector F por el brazo h (h es la distancia del punto O a la recta en la cual está representado el vector de fuerza F), es decir, $|\overrightarrow{OM}| = |\boldsymbol{F}| \cdot h$ o

$$|\overrightarrow{OM}| = |\boldsymbol{F}| \cdot |\boldsymbol{r}| . \operatorname{sen} (\widehat{\boldsymbol{F}; \boldsymbol{r}}),$$

donde $\boldsymbol{r} = \overrightarrow{OA}$ es el radio vector del punto de aplicación de la fuerza $\boldsymbol{F}$.

El vector $\overrightarrow{OM}$ se denomina producto vectorial del vector $\boldsymbol{r}$ por el vector $\boldsymbol{F}$. Antes de dar la definición del producto

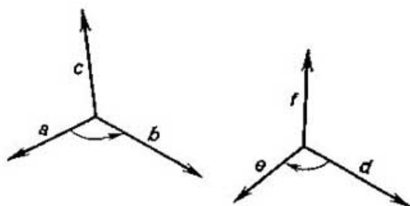


Fig. 54

vectorial de dos vectores arbitrarios $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$, introduzcamos el concepto de ternas de vectores derecha e izquierda.

Tres vectores no coplanares $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{c}$ tomados en el orden indicado, forman la terna *derecha*, si después de ser reducidos al origen común el vector $\boldsymbol{c}$ está situado por el otro lado del plano, que contiene los vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$, de donde el giro más breve de $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$ parece ser realizado en sentido antihorario. En caso contrario, la terna de vectores se denomina *izquierda*. Los vectores $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, representados en la figura 54, forman la terna derecha, mientras que los vectores $\boldsymbol{d}$, $\boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{f}$, la izquierda.

Los vectores $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{F}$, $\overrightarrow{OM}$ en la figura 53 forman la terna derecha.

Producto vectorial del vector $\boldsymbol{a}$ por el vector $\boldsymbol{b}$ no colineal a él se denomina tal tercero vector $\boldsymbol{c}$ que satisface las tres condiciones siguientes:

1) la longitud del vector $|\boldsymbol{c}| = |\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}| \cdot \operatorname{sen} (\widehat{\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b}})$;

2) el vector $\boldsymbol{c}$ es perpendicular a los vectores factores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$; $\boldsymbol{c} \perp \boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{c} \perp \boldsymbol{b}$;

3) los tres vectores $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ forman en el orden indicado una terna derecha.

El producto vectorial de los vectores colineales se considera igual al vector nulo.

El producto vectorial del vector $\boldsymbol{a}$ por el vector $\boldsymbol{b}$ se designa con el símbolo $[\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b}]$. Las condiciones 1) y 2) definen el vector $\boldsymbol{c} = [\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b}]$ con precisión de hasta dos direcciones recíprocamente opuestas. La condición 3) determina una de estas dos direcciones. La condición 1) puede ser enunciada puramente en forma geométrica: la longitud del vector $\boldsymbol{c}$ contiene tantas unidades de longitud, cuantas unidades cuadradas homónimas comprende el área de un paralelogramo construido sobre los vectores factores (fig. 55).

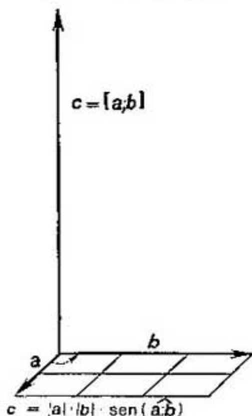


Fig. 55

De la condición 1) se desprende que $[\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b}] \neq 0$, si $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ son no colineales. Por otro lado, el producto vectorial de los vectores colineales según la definición es igual al vector nulo. Así pues, la igualdad

$$[\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b}] = 0$$

es la condición necesaria y suficiente de colinealidad de los vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$. Examinemos algunas propiedades del producto vectorial.

1. Al cambiar el orden de los factores el producto vectorial conserva su longitud, pero cambia su dirección por la opuesta:

$$[\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b}] = -[\boldsymbol{b}; \boldsymbol{a}].$$

□ En efecto, de acuerdo con la definición del producto vectorial se tiene

$$|[\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b}]| = |\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}| \cdot \operatorname{sen} (\widehat{\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b}}),$$

$$|[\boldsymbol{b}; \boldsymbol{a}]| = |\boldsymbol{b}| \cdot |\boldsymbol{a}| \cdot \operatorname{sen} (\widehat{\boldsymbol{b}; \boldsymbol{a}}),$$

puesto que $(\widehat{a;\ b}) = (\widehat{b;\ a})$, entonces $|[a;\ b]| = |[b;\ a]|$.

Los vectores $[a;\ b]$ y $[b;\ a]$ son perpendiculares al plano definido por los vectores factores a y b. Pero, como los vectores a, b y $[a;\ b]$ (lo mismo que los vectores b, a y $[b;\ a]$) forman ternas derechas, los vectores $[a;\ b]$ y $[b;\ a]$ deberán ser contrariamente dirigidos (fig. 56). ■

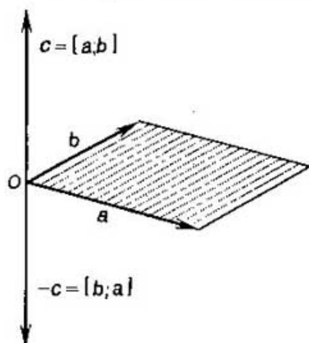


Fig. 56

2. Propiedad de asociatividad del producto vectorial respecto al factor escalar:

$$[ma;\ b] = [a;\ mb] = m\,[a;\ b].$$

3. La propiedad de distributividad del producto vectorial se expresa por medio de la igualdad

$$[a + b;\ c] = [a;\ c] + [b;\ c].$$

Aceptemos las propiedades 2 y 3 del producto vectorial sin recurrir a la demostración.

Problema 1. Hállese la longitud del vector $[3a - b;\ a - 2b]$, si $a \perp b$, $|a| = 3$, $|b| = 2$.

△ Debido a las propiedades 2 y 3 del producto vectorial tenemos

$$[3a - b;\ a - 2b] = 3\,[a;\ a] - [b;\ a] - 6\,[a;\ b] + \\ + 2\,[b;\ b].$$

Pero $[a;\ a] = 0$ y $[b;\ b] = 0$, ya que cualquier vector es colineal a sí mismo, y el producto vectorial de los vectores colineales es igual al vector nulo. En adelante, de acuerdo con la propiedad 1 tenemos

$$[b;\ a] = -[a;\ b],$$

y, por lo tanto,

$$[3a - b;\ a - 2b] = -5\,[a;\ b].$$

Por consiguiente,

$$|[3a - b;\ a - 2b]| = |-5\,[a;\ b]| = \\ = 5\,|a|\cdot|b|\cdot\text{sen}\,90° = 5\cdot3\cdot2 = 30.\ ▲$$

Problema 2. Hállense y represéntense los vectores $[a; b]$ y $[b; a]$, si $a = 3i$, $b = 2i + 2k$ (i, j, k son vectores unitarios perpendiculares entre sí que forman la terna derecha).

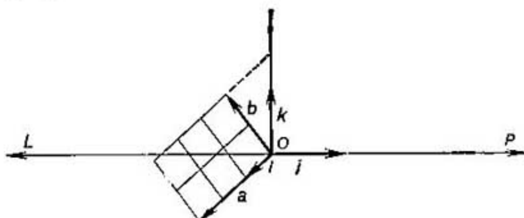


Fig. 57

△ Puesto que $[i; i] = 0$ e $[i; k] = -j$, entonces

$$[a; b] = [3i; 2i + 2k] = 6 [i; i] + 6 [i; k] = -6j.$$

El vector $[a; b] = -6j$ se representa en la figura 57 por el segmento dirigido $\overrightarrow{OL}$, el vector $[b; a] = -6j$, por el segmento dirigido $\overrightarrow{OP}$. ▲

§ 22. Producto vectorial de dos vectores definidos por sus coordenadas

Hallemos la expresión para el producto vectorial de dos vectores por medio de las coordenadas cartesianas rectangulares de estos vectores.

Sea que los vectores $a = (x_1; y_1; z_1)$ y $b = (x_2; y_2; z_2)$ están dados por sus coordenadas en un sistema cartesiano rectangular de coordenadas O, i, j, k y la terna de los vectores i, j, k es derecha (esto se supondrá siempre en adelante para mayor precisión).

Desarrollemos a y b según los vectores básicos:

$$a = x_1 i + y_1 j + z_1 k, \quad b = x_2 i + y_2 j + z_2 k.$$

Utilizando las propiedades del producto vectorial, obtenemos

$$\begin{aligned}[a; b] &= [x_1 i + y_1 j + z_1 k; x_2 i + y_2 j + z_2 k] = \\ &= x_1 x_2 [i; i] + x_1 y_2 [i; j] + x_1 z_2 [i; k] + y_1 x_2 [j; i] + \\ &+ y_1 y_2 [j; j] + y_1 z_2 [j; k] + z_1 x_2 [k; i] + z_1 y_2 [k; j] + \\ &+ z_1 z_2 [k; k]. \qquad (1)\end{aligned}$$

Según la definición del producto vectorial hallamos

$$[i;\ i] = 0, \qquad [i;\ j] = k, \qquad [i;\ k] = -j,$$
$$[j;\ i] = -k, \quad [j;\ j] = 0, \qquad [j;\ k] = i,$$
$$[k;\ i] = j, \qquad [k;\ j] = -i, \quad [k;\ k] = 0.$$

Teniendo en cuenta estas igualdades se puede escribir la fórmula (1) así:

$$[a;\ b] = x_1y_2k - x_1z_2j - y_1x_2k + y_1z_2i + \\ + z_1x_2j - z_1y_2i$$

o

$$[a;\ b] = (y_1z_2 - z_1y_2)\ i + (z_1x_2 - z_2x_1)\ j + \\ + (x_1y_2 - y_1x_2)\ k. \qquad (2)$$

La fórmula (2) da la expresión para el producto vectorial de dos vectores representados por sus coordenadas.

La fórmula obtenida es voluminosa y se recuerda con dificultad. Utilizando las designaciones de los determinantes (*Algebra y principios de análisis*, parte I, § 10), puede ser escrita en otra forma más cómoda para retenerla:

$$[a;\ b] = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} k. \qquad (3)$$

Habitualmente la fórmula (3) se escribe aún más brevemente:

$$[a;\ b] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}, \qquad (4)$$

considerando que el segundo miembro de la fórmula (3) está obtenido formalmente del segundo miembro de la fórmula (4), según la regla de desarrollo del determinante por la primera fila.

Señalemos también, que en el caso particular, cuando los vectores a y b están situados en el plano de los vectores i y j la fórmula (4) se simplifica:

$$[a;\ b] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_1 & y_1 & 0 \\ x_2 & y_2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} k. \qquad (5)$$

Problema 1. Hállese el producto vectorial $[a; b]$ de los vectores $a = (2; 3; -4)$ y $b = (5; 1; 2)$.

△ Sustituyendo directamente las coordenadas de los vectores a y b en la fórmula (4) obtenemos

$$[a; b] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 3 & -4 \\ 5 & 1 & 2 \end{vmatrix} = i \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - j \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}.$$

Por consiguiente, $[a; b] = 10i - 24j - 13k$. ▲

Problema 2. Hállese la longitud del vector $[a; b]$, si $a = (2, 3)$ y $b = (-1; 7)$.

△ Utilicemos la fórmula (5):

$$[a; b] = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 7 \end{vmatrix} k = 17k.$$

Por consiguiente, $|[a; b]| = |17k| = 17$. ▲

§ 23 *. Producto mixto de tres vectores y sus propiedades

Se denomina *producto mixto de tres vectores* a, b, c el número igual al producto escalar del vector $[a; b]$ por el vector c.

El producto mixto de los vectores a, b y c se designa $(a; b; c)$. Por consiguiente,

$$(a; b; c) = |[a; b]| \cdot |c| \cdot \cos\psi, \qquad (1)$$

donde ψ es el ángulo entre los vectores $[a; b]$ y c.

Teorema 1. *El módulo del producto mixto de tres vectores no coplanares* a, b *y* c *es igual al volumen del paralelepípedo construido sobre los vectores factores.*

□ Como es sabido (21), el área S del paralelogramo construido sobre los vectores a y b es igual a $|[a; b]|$. Por lo tanto de la fórmula (1) se deduce que

$$(a; b; c) = S \cdot |c| \cdot \cos\psi.$$

Por otro lado, el volumen V del paralelepípedo construido sobre los vectores a, b, c (fig. 58), es igual al producto del área de su base S por la altura h, además, $h = |AA_2|$, donde A_2 es la proyección del vértice A_1 sobre el eje defi-

nido por el vector $[a; b]$. Puesto que $|AA_2| = |c| \times$ $\times |\cos\psi|$,

$$V = S \cdot h = S \cdot |c| \cdot |\cos\psi| = |(a;\ b;\ c)|. ■$$

De la fórmula (1) se desprende que si el producto mixto de tres vectores no es igual a cero, su signo coincide con el signo $\cos\psi$. Por lo tanto, el producto mixto es positivo, si el vector c está orientado en el mismo sentido del plano de los vectores a y b, que el vector $[a; b]$, es decir, si la terna de los vectores a, b, c es derecha. El producto mixto es negativo cuando el vector c y el vector $[a; b]$ están orientados en sentido opuesto del plano de los vectores a y b, es decir, cuando la terna de los vectores a, b, c es izquierda.

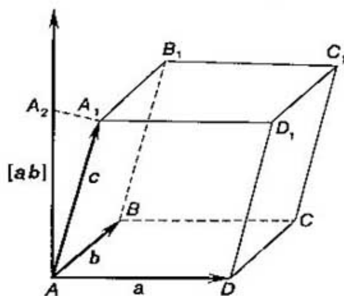


Fig. 58

Así pues, si los vectores a, b, c forman una terna derecha, entonces $(a;\ b;\ c) > 0$, si forman una terna izquierda, $(a;\ b;\ c) < 0$.

Teorema 2. *El producto mixto de tres vectores es igual a cero, cuando y sólo cuando los vectores son coplanares.*

□ **Necesidad.** Sea que $(a;\ b;\ c) = 0$. Supongamos que los vectores a, b y c son no coplanares. Construyamos sobre estos vectores un paralelepípedo. Su volumen $V > 0$, pero según el teorema 1 $|(a;\ b;\ c)| = V$, lo que contradice a la suposición.

Suficiencia. Sea que los vectores a, b y c son coplanares. Entonces, el vector $[a; b]$ es perpendicular al vector c, pero el producto escalar de los vectores perpendiculares es igual a cero, es decir, $[a; b] \cdot c = (a;\ b;\ c) = 0$. ■

Examinemos algunas propiedades del producto mixto.

1. Cualesquiera que sean los vectores a, b y c son válidas las igualdades

$$(a;\ b;\ c) = (b;\ c;\ a) = (c;\ a;\ b),$$

es decir, en caso de la permutación cíclica de los factores el producto mixto no varía.

□ Es suficiente demostrar la primera igualdad, ya que la segunda se deduce de la primera.

Si los vectores $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{c}$ son coplanares, la igualdad $(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b}; \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{b}; \boldsymbol{c}; \boldsymbol{a})$ es evidente; ambos miembros de la igualdad son iguales a cero.

Sea que los vectores $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{c}$ son no coplanares. Entonces, debido al teorema 1

$$|(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c})| = V \quad \text{y} \quad |(\boldsymbol{b}; \boldsymbol{c}; \boldsymbol{a})| = V,$$

donde V es el volumen del paralelepípedo construido sobre los tres vectores dados. Pero las ternas de los vectores $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ y $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{a}$ son al mismo tiempo, bien derechas o bien izquierdas, por lo tanto los signos de los números $(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b}; \boldsymbol{c})$ y $(\boldsymbol{b}; \boldsymbol{c}; \boldsymbol{a})$ coinciden.

2. Cualesquiera que sean los vectores $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{c}$ son válidas las igualdades

$$(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b}; \boldsymbol{c}) = -(\boldsymbol{b}; \boldsymbol{a}; \boldsymbol{c}) = -(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{c}; \boldsymbol{b}),$$

es decir, en caso de permutación de dos factores adyacentes el signo del producto mixto se cambia por el contrario.

□ La primera de las igualdades se deduce de las propiedades del producto vectorial (21):

$$(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b}; \boldsymbol{c}) = [\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b}]\cdot\boldsymbol{c} = -[\boldsymbol{b}; \boldsymbol{a}]\cdot\boldsymbol{c} = -(\boldsymbol{b}; \boldsymbol{a}; \boldsymbol{c}).$$

La segunda igualdad es evidente debido a la propiedad 1 del producto mixto. ■

Problema 1. Calcúlese $(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b}; \boldsymbol{c})$, si los vectores $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ forman una terna derecha, $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{b} \perp \boldsymbol{c}$, $(\widehat{\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b}}) = 150°$, $|\boldsymbol{a}| = |\boldsymbol{b}| = 4$, $c = 3$.

△ Según la definición

$$(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b}; \boldsymbol{c}) = [\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b}]\cdot\boldsymbol{c} = |\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cdot\text{sen } 150°\cdot|\boldsymbol{c}|\cdot\cos 0° =$$

$$= 4\cdot 4\cdot 3\cdot\frac{1}{2} = 24. \ \blacktriangle$$

Problema 2. Calcúlese $(\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}; \boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{i}; \boldsymbol{k})$, donde $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ son vectores unitarios perpendiculares entre sí que forman la terna derecha.

$$\triangle\ (\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}; \boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{i}; \boldsymbol{k}) = [\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}; \boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{i}]\cdot\boldsymbol{k} =$$

$$= ([\boldsymbol{i}; \boldsymbol{j}] - 2[\boldsymbol{i}; \boldsymbol{i}] + [\boldsymbol{j}; \boldsymbol{j}] - 2[\boldsymbol{j}; \boldsymbol{i}])\cdot\boldsymbol{k} = 3[\boldsymbol{i}; \boldsymbol{j}]\cdot\boldsymbol{k} =$$

$$= 3(\boldsymbol{i}; \boldsymbol{j}; \boldsymbol{k}) = 3. \ \blacktriangle$$

§ 24 *. Producto mixto de tres vectores definidos por sus coordenadas

Sea que los vectores $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{c}$ están dados por sus coordenadas rectangulares cartesianas

$$\boldsymbol{a} = (x_1;\ y_1;\ z_1), \quad \boldsymbol{b} = (x_2;\ y_2;\ z_2), \quad \boldsymbol{c} = (x_3;\ y_3;\ z_3).$$

Para calcular el producto mixto $(\boldsymbol{a};\ \boldsymbol{b};\ \boldsymbol{c})$ hallamos en primer lugar el producto vectorial de los vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ (22, fórmula (4)):

$$[\boldsymbol{a};\ \boldsymbol{b}] = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \boldsymbol{i} - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} \boldsymbol{j} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \boldsymbol{k}.$$

Multipliquemos ahora escalarmente el vector $[\boldsymbol{a};\ \boldsymbol{b}]$ por el vector $\boldsymbol{c} = x_3\boldsymbol{i} + y_3\boldsymbol{j} + z_3\boldsymbol{k}$. Según la fórmula (2) del 19 obtendremos

$$[\boldsymbol{a};\ \boldsymbol{b}] \cdot \boldsymbol{c} = x_3 \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} - y_3 \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} + z_3 \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Por consiguiente,

$$(\boldsymbol{a};\ \boldsymbol{b};\ \boldsymbol{c}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}, \tag{1}$$

es decir, *el producto mixto de tres vectores es igual al determinante de tercer grado que contiene en la primera fila las coordenadas del primer vector, en la segunda, del segundo y en la tercera, las coordenadas del tercer vector.*

Ahora se puede enunciar el teorema 2 del párrafo anterior de la manera siguiente.

Para que los vectores $\boldsymbol{a} = (x_1;\ y_1;\ z_1)$, $\boldsymbol{b} = (x_2;\ y_2;\ z_2)$ y $\boldsymbol{c} = (x_3;\ y_3;\ z_3)$ sean coplanares, es necesario y suficiente que

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0. \tag{2}$$

Problema 1. Determinar si son coplanares los vectores $\boldsymbol{a} = (4;\ 2;\ 1)$, $\boldsymbol{b} = (8;\ 6;\ 8)$ y $\boldsymbol{c} = (5;\ 2;\ 1)$.

△ Hagamos uso de la condición (2):

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 8 & 6 & 3 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 5\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 8 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 8 & 6 \end{vmatrix} = 5\cdot 0 - 2\cdot 4 + 8 = 0.$$

Por consiguiente, los vectores son coplanares.

Problema 2. Hállese el volumen del paralelepípedo construido sobre los vectores $\boldsymbol{a} = (4;\ -1;\ 1)$, $\boldsymbol{b} = (8;\ 3;\ 3)$ y $\boldsymbol{c} = (5;\ 1;\ 1)$.

△ Hallemos el producto mixto de los vectores dados:

$$(\boldsymbol{a};\ \boldsymbol{b};\ \boldsymbol{c}) = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 8 & 3 & 3 \\ 5 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 8 & 3 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 8 & 3 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = -14.$$

Ahora según el teorema 1 del § 23 obtenemos

$$V = |(\boldsymbol{a};\ \boldsymbol{b};\ \boldsymbol{c})| = |-14| = 14 \quad \text{(unidades cúbicas).} \ \blacktriangle$$

§ 25. Solución de problemas por el método vectorial

Cuando se resuelven los problemas geométricos por el método vectorial es preciso pasar de la formulación geométrica del problema a su descripción por vectores. Luego, utilizando las respectivas propiedades de los vectores, hallar ciertas relaciones vectoriales, de las cuales se puede obtener la solución del problema. Ilustremos con ejemplos, cómo se hace esto en la práctica.

Problema 1. Demuéstrese que un segmento que une los puntos medios de las diagonales de un trapecio es paralelo a las bases.

△ Sea que los puntos M y N son los puntos medios de las diagonales del trapecio $ABCD$ (fig. 59). Demostremos que $[MN] \parallel [AD]$. Para esto es suficiente cerciorarse de que el vector $\overrightarrow{MN}$ es colineal al vector $\overrightarrow{AD}$.

Puesto que M y N son los puntos medios de los segmentos AC y BD, entonces

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}),$$

$$\overrightarrow{AN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}).$$

Por consiguiente,

$$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})-$$
$$-\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{BC}).$$

El vector $\overrightarrow{BC}$ es colineal al vector $\overrightarrow{AD}$, es decir, $\overrightarrow{BC}=$ $=k_1\overrightarrow{AD}$. Por lo tanto

$$\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}-k_1\overrightarrow{AD})=\frac{1}{2}(1-k_1)\overrightarrow{AD}=k\overrightarrow{AD},$$

es decir, el vector $\overrightarrow{MN}$ es colineal al vector $\overrightarrow{AD}$. Como $\overrightarrow{AD}$ es colineal a $\overrightarrow{BC}$, el segmento MN es paralelo a las bases del trapecio. ▲

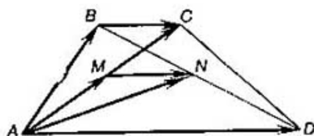


Fig. 59

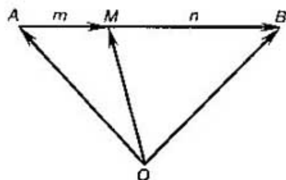


Fig. 60

Así pues, para convencerse de que ciertos segmentos AB y CD son paralelos, es suficiente mostrar que $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{CD}$, donde k es cierto número.

Problema 2. Dividir el segmento dado AB en la relación dada $m:n$, es decir, hallar tal punto $M\in[AB]$ que $\frac{|AM|}{|MB|}=\frac{m}{n}$. Examinar también un caso particular: $m=n$.

△ Es evidente que el punto $M\in[AB]$ divide el segmento AB (fig. 60) en la relación dada $m:n$ cuando y sólo cuando

$$\overrightarrow{AM}=\frac{m}{n}\overrightarrow{MB}. \qquad (1)$$

a) Si los puntos A y B están expresados por sus radios vectores $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$ respecto a cierto punto O, entonces de (1)

se deduce la igualdad $\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA} = \frac{m}{n}(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM})$, de la cual resulta que

$$\overrightarrow{OM} = \frac{n}{m+n}\overrightarrow{OA} + \frac{m}{m+n}\overrightarrow{OB}. \qquad (2)$$

La fórmula (2) da la solución del problema, ya que expresa el radio vector del punto buscado M, que divide el segmento AB en la relación $m : n$ por medio de los radios vectores de los puntos dados A y B.

En particular, si el punto M es el punto medio del segmento AB, entonces poniendo en la fórmula (2) $m = n$, obtendremos

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}). \qquad (3)$$

b) Si los puntos A y B están expresados por sus coordenadas en un cierto sistema cartesiano de coordenadas O, $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$, utilizando la fórmula (2), se puede hallar fácilmente las coordenadas del punto M en el mismo sistema. La igualdad vectorial (2) es equivalente a las tres igualdades numéricas

$$\begin{aligned} x &= \frac{n}{m+n}x_1 + \frac{m}{m+n}x_2, \\ y &= \frac{n}{m+n}y_1 + \frac{m}{m+n}y_2, \\ z &= \frac{n}{m+n}z_1 + \frac{m}{m+n}z_2, \end{aligned} \qquad (4)$$

donde x_1, y_1, z_1 y x_2, y_2, z_2 son las coordenadas de los extremos del segmento dado AB, y x, y, z son las coordenadas del punto buscado M.

En el caso particular, cuando el punto M es el punto medio del segmento AB, las fórmulas (4) se simplifican:

$$x = \frac{x_1+x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1+y_2}{2}, \quad z = \frac{z_1+z_2}{2}. \ \blacktriangle \qquad (5)$$

De este modo, para hallar el punto M que divide el segmento AB en la relación de $m : n$, contando del punto A, se debe emplear la fórmula (2), si los extremos del segmento están dados por sus radios vectores, o por las fórmulas (4), si los extremos del segmento están dados por sus coorde-

nadas. Para hallar el punto medio del segmento se utilizan la fórmula (3) o las fórmulas (5) respectivamente.

Problema 3. Demostrar que las medianas de un triángulo arbitrario ABC se intersecan en tal punto M que:

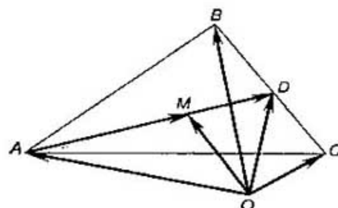


Fig. 61

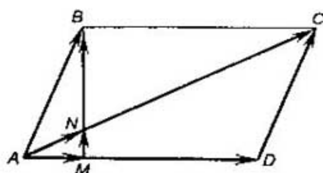


Fig. 62

1) el punto M divide cada mediana en la relación de 2 : 1, contando desde el vértice del triángulo;

2) para cualquier punto O es válida la relación

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}).$$

△ Sea que el punto M divide la mediana AD del triángulo ABC en la relación 2 : 1 (fig. 61). Entonces, según la fórmula (2) obtenemos ($m = 2$, $n = 1$)

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OD},$$

donde O es un punto arbitrario del espacio. El punto D es el punto medio del lado BC, por lo tanto, según la fórmula (3),

$$\overrightarrow{OD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}).$$

Por consiguiente,

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}).$$

El mismo resultado se obtendrá para cualquier otra mediana del triángulo ABC. Esto quiere decir que M es el punto común de todas las tres medianas. De esta forma, ambas afirmaciones del problema están demostradas. ▲

De la solución de este problema se deduce que si M es el punto de intersección de las medianas del triángulo ABC, y O es un punto arbitrario del espacio, tiene lugar la fórmula

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}). \tag{6}$$

Problema 4. En el lado AD y en la diagonal AC del paralelogramo $ABCD$ (fig. 62) se toman dos puntos tales que $|AM| = \frac{1}{5}|AD|$ y $|AN| = \frac{1}{6}|AC|$. Demuéstrese que los puntos M, N y B se sitúan en una misma recta.

△ Para cerciorarse de que los puntos M, N y B están situados en una misma recta, es suficiente demostrar que los vectores $\overrightarrow{MN}$ y $\overrightarrow{MB}$ son colineales. Introduzcamos el sistema cartesiano de coordenadas: tomemos como origen de coordenadas el punto A y como vectores básicos los vectores $\overrightarrow{AD}$ y $\overrightarrow{AB}$. En este sistema de coordenadas los puntos M, N y B tienen las coordenadas $\left(\frac{1}{5}; 0\right)$, $\left(\frac{1}{6}; \frac{1}{6}\right)$, (0; 1). Por consiguiente,

$$\overrightarrow{MN} = \left(-\frac{1}{30}; \frac{1}{6}\right), \qquad \overrightarrow{MB} = \left(-\frac{1}{5}; 1\right).$$

Los vectores $\overrightarrow{MN}$ y $\overrightarrow{MB}$ son colineales, ya que

$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{6}\overrightarrow{MB}. \ \blacktriangle$$

Así pues, para determinar si los tres puntos dados $M_1(x_1; y_1)$, $M_2(x_2; y_2)$, $M_3(x_3; y_3)$ están situados en una misma recta es suficiente demostrar que los vectores $\overrightarrow{M_1M_2}$ y $\overrightarrow{M_1M_3}$ son colineales. Esribamos la condición de colinealidad $\overrightarrow{M_1M_3} = k\overrightarrow{M_1M_2}$ en coordenadas

$$x_3 - x_1 = k(x_2 - x_1),$$
$$y_3 - y_1 = k(y_2 - y_1).$$

Al eliminar k de estas dos ecuaciones obtendremos

$$(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1) = 0.$$

Esta igualdad puede ser escrita en una forma más cómoda:

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & x_3-x_1 \\ y_2-y_1 & y_3-y_1 \end{vmatrix}=0. \qquad (7)$$

La igualdad (7) da la condición necesaria y suficiente de pertenencia de los tres puntos del plano $M_1(x_1;\ y_1)$; $M_2(x_2;\ y_2)$, $M_3(x_3;\ y_3)$ a una recta.

Por ejemplo, en el problema 4 se trataba de los puntos $M\left(\frac{1}{5};\ 0\right)$, $N\left(\frac{1}{6};\ \frac{1}{6}\right)$, $B(0;\ 1)$. Ellos pertenecen a una recta, ya que

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{6}-\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{6} & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -\frac{1}{30} & -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{6} & 1 \end{vmatrix}=0.$$

Problema 5. En el sistema cartesiano rectangular de coordenadas se dan los puntos $M_1(5;\ 0;\ 1)$ y $M_2(4;\ 1;\ -2)$. ¿Para qué valores de x y y el punto $M_3(x;\ y;\ 4)$ pertenece a la recta M_1M_2?

△ Los puntos M_1, M_2, M_3 pertenecen a una recta cuando y sólo cuando los vectores $\overrightarrow{M_1M_2}$ y $\overrightarrow{M_1M_3}$ son colineales. En el párrafo 21 fue demostrado que la condición $[\overrightarrow{M_1M_2};\ \overrightarrow{M_1M_3}]=0$ es la condición necesaria y suficiente de colinealidad de dos vectores. Hallemos las coordenadas de los vectores

$$\overrightarrow{M_1M_2}=(-1;\ 1;\ -3), \quad \overrightarrow{M_1M_3}=(x-5;\ y;\ 3)$$

y su producto vectorial

$$[\overrightarrow{M_1M_2};\ \overrightarrow{M_1M_3}]=\begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 1 & -3 \\ x-5 & y & 3 \end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ y & 3 \end{vmatrix} i-\begin{vmatrix} -1 & -3 \\ x-5 & 3 \end{vmatrix} j+\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ x-5 & y \end{vmatrix} k=$$

$$=(3+3y)\,i+(18-3x)\,j+(5-x-y)\,k.$$

El vector obtenido es igual al vector nulo si

$$\begin{cases} 3+3y \quad = 0, \\ 18-3x \quad = 0, \\ 5-x-y=0. \end{cases}$$

De aquí se deduce que $x = 6$, $y = -1$. ▲

Así pues, para cerciorarse que los puntos M_1, M_2, M_3 pertenecen a una misma recta es suficiente demostrar que $[\overrightarrow{M_1M_2};\ \overrightarrow{M_1M_3}] = \mathbf{0}$.

Señalemos que si los puntos M_1, M_2, M_3 están situados en el mismo plano xOy, esta condición es equivalente a la condición (7).

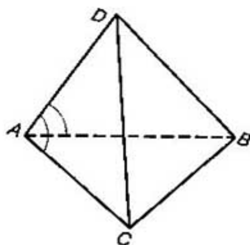


Fig. 63

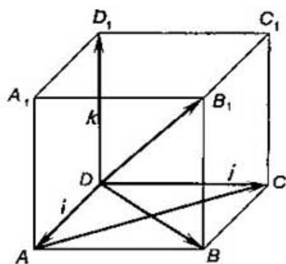


Fig. 64

Problema 6. Se da la pirámide triangular $ABCD$ (fig. 63): $|AB| = |AC|$, $\widehat{DAB} = \widehat{DAC}$. Demuéstrese que $[AD] \perp [BC]$.

△Las aristas AD y BC son perpendiculares, si $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$. Hallemos el producto escalar de los vectores $\overrightarrow{AD}$ y $\overrightarrow{BC}$:

$$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} \cdot (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} =$$

$$= |\overrightarrow{AD}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cos(\widehat{DAC}) - |\overrightarrow{AD}| \cdot |\overrightarrow{AB}| \cdot \cos \widehat{DAB} = 0,$$

ya que según la condición $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AB}|$ y $\widehat{DAC} = \widehat{DAB}$. ▲

Así pues, para cerciorarse de que ciertos segmentos AB y CD son perpendiculares es suficiente mostrar que $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=$ $=0$.

Problema 7. Hállense las magnitudes de los ángulos entre las diagonales del cubo y las diagonales de sus caras.

△ Es evidente, que es suficiente hallar las magnitudes de los ángulos entre la diagonal del cubo DB_1 y las diagonales de la base inferior DB y AC (fig. 64).

Introduzcamos un sistema de coordenadas D, $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ de manera que

$$\boldsymbol{i}=\overrightarrow{DA},\quad \boldsymbol{j}=\overrightarrow{DC},\quad \boldsymbol{k}=\overrightarrow{DD_1}.$$

En el sistema de coordenadas elegido

$$\overrightarrow{DB_1}=(1;\ 1;\ 1),\quad \overrightarrow{DB}=(1;\ 1;\ 0),\quad \overrightarrow{AC}=(-1;\ 1;\ 0).$$

Hagamos uso de la fórmula (1) del § 20:

$$\cos(\widehat{\overrightarrow{DB_1};\ \overrightarrow{DB}})=\frac{\overrightarrow{DB_1}\cdot\overrightarrow{DB}}{|\overrightarrow{DB_1}|\cdot|\overrightarrow{DB}|}=\frac{2}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}}=\sqrt{\frac{2}{3}},$$

$$\cos(\widehat{\overrightarrow{DB_1};\ \overrightarrow{AC}})=\frac{\overrightarrow{DB_1}\cdot\overrightarrow{AC}}{|DB_1|\cdot|AC|}=\frac{0}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}}=0,$$

de donde $(\widehat{\overrightarrow{DB_1};\ \overrightarrow{DB}})\approx 35°$, $(\widehat{\overrightarrow{DB_1};\ \overrightarrow{AC}})=90°$. ▲

Así pues, la magnitud del ángulo entre los segmentos se puede hallar de la manera siguiente: escójase un sistema rectangular de coordenadas, hállense las coordenadas de los vectores respectivos y, luego, utilícense las fórmulas (2) o (3) del § 19.

Problema 8. En la pirámide $ABCD$ (fig. 65) $\widehat{ADB}+$ $+\widehat{ADC}=180°$. Hállese $\widehat{ADF}$, si $[DF]$ es la bisectriz del ángulo BDC.

△ Examinemos la base $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$, donde $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ son vectores unitarios, cuyas direcciones coinciden con las direcciones de los vectores $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{DC}$. Es fácil ver que el vector $\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3$ tiene la misma dirección que el vector $\overrightarrow{DF}$.

De acuerdo con la fórmula (1) del § 20

$$\cos(\widehat{ADF}) = \cos(\widehat{e_1; e_2 + e_3}) = \frac{e_1 \cdot (e_2 + e_3)}{|e_1| \cdot |e_2 + e_3|} = 0,$$

puesto que

$$e_1 \cdot (e_2 + e_3) = e_1 \cdot e_2 + e_1 \cdot e_3 = |e_1| \cdot |e_2| \times$$

$$\times \cos(\widehat{ADB}) + |e_1| \cdot |e_3| \cdot \cos(\widehat{ADC}) =$$

$$= \cos(ADB) + \cos(180° - \widehat{ADB}) = \cos(\widehat{ADB}) - \cos(\widehat{ADB}) = 0,$$

por consiguiente, $\widehat{ADF} = 90°$. ▲

De este modo, para calcular la magnitud del ángulo es suficiente elegir tres vectores no coplanares (dos no colineales en el caso del plano), cuyas longitudes y magnitudes de los ángulos entre ellos son conocidas. Luego, se hallan los vectores que dan el ángulo buscado y se calcula el coseno del ángulo buscado, según la fórmula

$$\cos(\widehat{a; b}) = \frac{a \cdot b}{|a \cdot b|}.$$

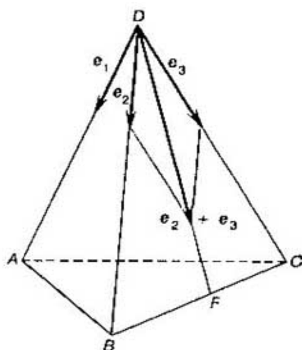


Fig. 65

Problema 9. Calcúlese el área del triángulo, cuyos vértices están dados por sus coordenadas en el sistema rectangular de coordenadas: A (1; 2), B (4; —5), C (5; 3).

△ Puesto que el área del paralelogramo construido sobre los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ es igual a $|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]|$, el área del triángulo ABC se calcula según la fórmula

$$S_\Delta = \frac{1}{2} |[\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}]|.$$

Ahora de acuerdo con la fórmula (5) del 22 obtenemos

$S_\Delta = \frac{1}{2} \left| k \begin{vmatrix} 3 & -7 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{2} |31k| = \frac{31}{2}$ (unidades cuadradas). ▲

Así pues, para calcular el área del triángulo se puede hallar el producto vectorial de dos vectores construidos sobre cualesquiera de sus dos lados, y, luego, calcular la mitad de su longitud.

Problema 10. Calcúlese el área del paralelogramo, cuyos tres vértices sucesivos A (1; 2; 0), B (3; 0; —3), C (5; 2; 6) están dados por sus coordenadas en un sistema rectangular.

△ Como $S_{\square} = |[\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{BC}]|$, y de acuerdo con la fórmula (4) del § 22

$$[\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{BC}] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -2 & -3 \\ 2 & 2 & 9 \end{vmatrix} = -12i + j + 4k.$$

entonces,

$$S_{\square} = \sqrt{12^2 + 24^2 + 8^2} = \sqrt{784} = 28 \text{ (unidades cuadradas). } \blacktriangle$$

De este modo, para calcular el área del paralelogramo se puede hallar el producto vectorial de dos vectores construidos sobre cualesquiera de sus dos lados adyacentes, y, luego, calcular su longitud.

Problema 11. Calcúlese el trabajo efectuado por la fuerza $\boldsymbol{F} = (1; 2; 3)$ cuando un punto material se desplaza rectilíneamente de la posición B (1; 0; 0) a la posición C (10; 1; 2).

△ Como se sabe del curso de física, el trabajo de una fuerza constante, cuando un punto material se desplaza rectilíneamente de la posición B a la posición C, es igual a

$$A = |\boldsymbol{F}| \cdot |\overrightarrow{BC}| \cos(\widehat{\boldsymbol{F}; \overrightarrow{BC}}),$$

es decir, $A = \boldsymbol{F} \cdot \overrightarrow{BC}$.

En nuestro caso $\boldsymbol{F} = (1; 2; 3)$, $\overrightarrow{BC} = (9; 1; 2)$, por lo tanto, según la fórmula (2) del § 19 obtenemos $A = 1 \cdot 9 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 = 17$ (unidades de trabajo). ▲

De este modo, para hallar el trabajo de una fuerza constante $\boldsymbol{F}$ cuando un punto material se desplaza a lo largo del segmento BC, es suficiente calcular el producto ~~vectorial~~ escalar del vector de fuerza $\boldsymbol{F}$ y del vector de desplazamiento BC.

Problema 12. La fuerza $\boldsymbol{F} = (3;\ 2;\ 1)$ está aplicada al punto $A\ (2;\ 0;\ 1)$. Determínese el momento M de esta fuerza respecto al punto $O\ (0;\ 0;\ 0)$.

$$\triangle \boldsymbol{M} = [\overrightarrow{OA};\ \boldsymbol{F}] = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + 4\boldsymbol{k}. \ \blacktriangle$$

Así pues, para determinar el momento de la fuerza $\boldsymbol{F}$ aplicada al punto A respecto al punto O es suficiente calcular el producto vectorial del vector $\overrightarrow{OA}$ por el vector $\boldsymbol{F}$.

Problema 13. Demuéstrese que los cuatro puntos $M_0\ (1;\ 2;\ -1)$, $M_1\ (0;\ 1;\ 5)$, $M_2\ (-1;\ 2;\ 1)$, $M_3\ (2;\ 1;\ 3)$ están situados en un mismo plano.

$\triangle$ Cuatro puntos están situados en un mismo plano cuando y sólo cuando los vectores $\overrightarrow{M_0M_1}$, $\overrightarrow{M_0M_2}$, $\overrightarrow{M_0M_3}$ son coplanares. Por lo tanto, su producto mixto deberá ser igual a cero.

Puesto que $\overrightarrow{M_0M_1} = (-1;\ -1;\ 6)$, $\overrightarrow{M_0M_2} = (-2;\ 0;\ 2)$ y $\overrightarrow{M_0M_3} = (1;\ -1;\ 4)$, entonces

$$(\overrightarrow{M_0M_1};\ \overrightarrow{M_0;\ M_2};\ \overrightarrow{M_0;\ M_3}) = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} +$$

$$+1 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + 6 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 - 10 + 12 = 0.$$

Por consiguiente, los puntos M_0, M_1, M_2 y M_3 están situados en un mismo plano. $\blacktriangle$

Así pues, para determinar si los cuatro puntos $M_0\ (x_0;\ y_0;\ z_0)$, $M_1\ (x_1;\ y_1;\ z_1)$, $M_2\ (x_2;\ y_2;\ z_2)$, $M_3\ (x_3;\ y_3;\ z_3)$ pertenecen a un mismo plano es suficiente convencerse de que el determinante

$$\begin{vmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \\ x_3 - x_0 & y_3 - y_0 & z_3 - z_0 \end{vmatrix}$$

es igual a cero.

Problema 14. Calcúlese el volumen de la pirámide, cuyos vértices se encuentran en los puntos A (1; 2; —1), B (0; 1; 5), C (—1; 2; 1), D (1; 2; 3).

△ El volumen de la pirámide $ABCD$ es seis veces menor que el volumen del paralelepípedo con las aristas $[AB]$, $[AC]$ y $[AD]$. Por lo tanto

$$V=\frac{1}{6}\,|(\overrightarrow{AB};\ \overrightarrow{AC};\ \overrightarrow{AD})|.$$

Calculemos el producto mixto de los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{AD}$ según la fórmula (1) del § 24:

$$(\overrightarrow{AB};\ \overrightarrow{AC};\ \overrightarrow{AD})=\begin{vmatrix}-1 & -1 & 6\\ -2 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 4\end{vmatrix}=4\begin{vmatrix}-1 & -1\\ -2 & 0\end{vmatrix}=-8.$$

Por consiguiente, $V=\frac{4}{3}$ (unidades cúbicas). ▲

De este modo, el volumen V de la pirámide con los vértices en los puntos

$A\ (x_1;\ y_1;\ z_1)$, $B\ (x_2;\ y_2;\ z_2)$, $C\ (x_3;\ y_3;\ z_3)$, $D\ (x_4;\ y_4;\ z_4)$

puede ser calculado por la fórmula

$$V=\frac{1}{6}\left|\begin{vmatrix}x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1\\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1\\ x_4-x_1 & y_4-y_1 & z_3-z_1\end{vmatrix}\right|.$$

Problemas para el capítulo I

1.1. Por los vectores dados $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ constrúyanse los siguientes vectores:

a) $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$; b) $-\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$; c) $2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$; d) $\frac{1}{2}\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$; e) $-\frac{1}{5}\boldsymbol{a}$.

1.2. En la figura 66 la circunferencia está dividida en tres, cuatro o seis arcos congruentes. Hállese en cada caso la suma de los vectores representados en las figuras.

1.3. Hállese la suma $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$ para los vectores $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ representados en la figura 67.

1.4. Dos fuerzas $\boldsymbol{F}_1$ y $\boldsymbol{F}_2$ actúan sobre un punto material. Hállese la magnitud de su resultante, si $|\boldsymbol{F}_1|=8H$, $|\boldsymbol{F}_2|=6H$ y $\widehat{(\boldsymbol{F}_1;\ \boldsymbol{F}_2)}=90°$.

1.5. Trácese cualquier pentágono $ABCDE$ y hállese la suma de los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{EA}$.

1.6. Tres fuerzas dirigidas a tres vértices sucesivos están aplicadas al centro de un hexágono regular. Hállese la magnitud de la resultante, si la magnitud de cada una de las fuerzas dadas es igual a 1 N.

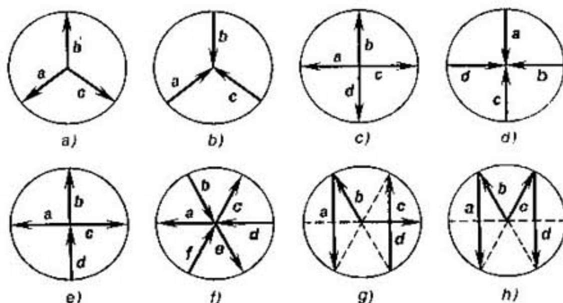


Fig. 66

1.7. Hállese la resultante de tres fuerzas aplicadas al punto M, si se sabe que estas fuerzas se representan por los vectores $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{MC}$, donde los puntos A, B, C son los vértices de un triángulo equilátero inscrito en una circunferencia con el centro O (fig. 68).

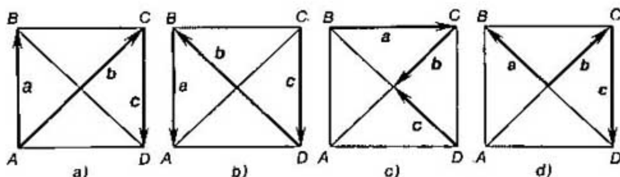


Fig. 67

1.8. Demuéstrese que de las medianas de cualquier triángulo se puede construir un triángulo.

1.9. Se da un tetraedro $ABCS$. Hállese la suma de los vectores: a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CS}$; b) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CS} + \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{AB}$.

1.10. Se da una pirámide cuadrangular regular $ABCDS$ (S es el vértice, O es la base de la altura). Demuéstrese que la suma de los vectores $\overrightarrow{OS}$, $\overrightarrow{DS}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{SB}$, $\overrightarrow{AO}$ es igual a la suma de los vectores $\overrightarrow{AS}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DA}$.

1.11. Sea que $\boldsymbol{a} = k\boldsymbol{b}$ $(\boldsymbol{a} \neq 0)$. ¿Para qué valores de k: a) $|\boldsymbol{a}| = |\boldsymbol{b}|$; b) $|\boldsymbol{a}| > |\boldsymbol{b}|$; c) $|\boldsymbol{a}| < |\boldsymbol{b}|$?

1.13. Determínense los valores de k, para los cuales la longitud del vector $k\boldsymbol{a}$ $(\boldsymbol{a} \neq 0)$: a) es igual a la longitud del vector $\boldsymbol{a}$; b) es mayor de $|3\boldsymbol{a}|$, c) es menor de $|5\boldsymbol{a}|$.

1.13. Determínese el número, por el cual hay que multiplicar el vector no nulo $\boldsymbol{a}$, para obtener tal vector $\boldsymbol{b}$, que: a) $|\boldsymbol{b}| = 5$ y $\boldsymbol{a} \uparrow\uparrow \boldsymbol{b}$; b) $|\boldsymbol{b}| = 1$ y $\boldsymbol{a} \uparrow\downarrow \boldsymbol{b}$.

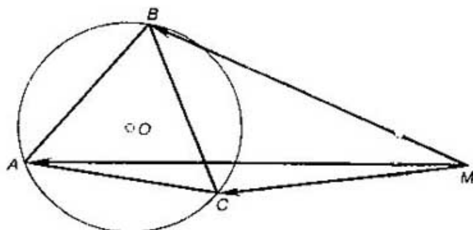


Fig. 68

1.14. En una recta se toman sucesivamente tres puntos M, N y P; el punto A es el punto medio del segmento MN, y el punto B, el punto medio del segmento NP. Exprésese el vector $\overrightarrow{AB}$ por medio del vector $\overrightarrow{PM}$.

1.15. En una recta se toman tres puntos A, B, C de manera, que $\overrightarrow{CA} = 3\overrightarrow{CB}$. Exprésese el vector $\overrightarrow{AB}$ por medio del vector $\overrightarrow{CB}$.

1.16. En el rectángulo $ABCD$ están trazadas las diagonales: $\overrightarrow{DB} = \boldsymbol{a}$; $\overrightarrow{AC} = \boldsymbol{b}$. Preséntense los vectores $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CD}$ en forma de una combinación lineal de los vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$.

1.17. En el paralelogramo $ABCD$: $\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{AD} = \boldsymbol{b}$, O es el punto de intersección de las diagonales. Desarróllense los vectores $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{CO}$ en vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$.

1.18. En el trapecio isósceles $ABCD$ la magnitud del ángulo BAD es igual a $60°$, $|AB| = |BC| = |CD| = 2$. Los puntos M y N son los puntos medios de los lados BC y DC. Desarróllense los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AN}$ y $\overrightarrow{MN}$, en vectores $\boldsymbol{m} = \dfrac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}$ y $\boldsymbol{n} = \dfrac{\overrightarrow{AD}}{|\overrightarrow{AD}|}$.

1.19. En una circunferencia con el centro O se dan los puntos A y B. Las tangentes a la circunferencia en estos puntos se intersecan en el punto C. Desarróllese el vector $\overrightarrow{OC}$ en vectores $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$, si: a) $\widehat{AOB} = 60°$; b) $\widehat{AOB} = 90°$.

1.20 Se da el cubo $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Hállese el desarrollo en vectores $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{AB}$, $\boldsymbol{b} = \overrightarrow{AD}$, $\boldsymbol{c} = \overrightarrow{AA_1}$, de los vectores: a) $\overrightarrow{AC_1}$; b) $\overrightarrow{AB_1}$;

c) $\overrightarrow{D_1C_1}$; d) $\overrightarrow{B_1D_1}$; e) $\overrightarrow{BC}$; f) $\overrightarrow{C_1C}$; g) $\overrightarrow{B_1D}$; h) $\overrightarrow{B_1O}$, donde O es el centro del cubo.

1.21. Se da el triángulo ABC. Tomando por base los vectores $e_1 = \overrightarrow{AB}$, $e_2 = \overrightarrow{AC}$, hállense las coordenadas de los vectores $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{BN}$, $\overrightarrow{CP}$ en esta base. Los puntos M, N, P son los puntos medios de los lados BC, AC, AB del triángulo.

1.22. Se da el hexágono regular $ABCDEF$. Tomando por base los vectores $e_1 = \overrightarrow{AF}$, $e_2 = \overrightarrow{AC}$, hállense las coordenadas de los vec-

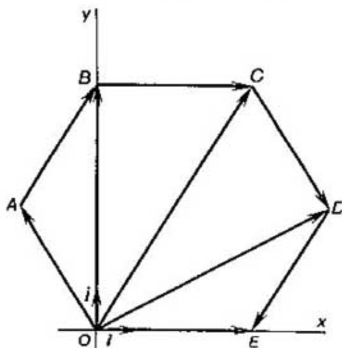


Fig. 69

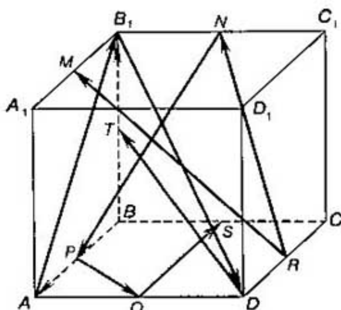


Fig. 70

tores siguientes: a) $\overrightarrow{AB}$; b) $\overrightarrow{BC}$; c) $\overrightarrow{CD}$; d) $\overrightarrow{DE}$; e) $\overrightarrow{EF}$; f) $\overrightarrow{AD}$; g) $\overrightarrow{AE}$; h) $\overrightarrow{FC}$; i) $\overrightarrow{DB}$; j) $\overrightarrow{BE}$.

1.23. En el plano se da un hexágono regular. Desarróllense en versores i y j todos los vectores representados en la figura 69, si $|\overrightarrow{OE}| = 4$.

1.24. En el cubo $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (fig. 70) los puntos M, N, P, Q, R, S, T son los puntos medios de las aristas. Los vectores $i = \overrightarrow{BA}$, $j = \overrightarrow{BC}$, $k = \overrightarrow{BB_1}$ se toman por base. Desarróllense en la base i, j, k los vectores siguientes: a) $\overrightarrow{DT}$; b) $\overrightarrow{AB_1}$; c) $\overrightarrow{NP}$; d) $\overrightarrow{PQ}$; e) $\overrightarrow{QS}$; f) $\overrightarrow{B_1D}$; g) $\overrightarrow{RM}$; h) $\overrightarrow{RN}$.

1.25. En un sistema cartesiano rectangular de coordenadas se dan los puntos A (3; —1; 2) y B (—1; 2; 2). Hállense las coordenadas de los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BA}$, sus longitudes y coordenadas del vector unitario, dirigido como el vector $\overrightarrow{BA}$.

1.26. Se da el vector $\boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j} + 4\boldsymbol{k}$. Hállese el vector $\boldsymbol{b}$, si $|\boldsymbol{a}| = |\boldsymbol{b}|$, la abscisa del vector $\boldsymbol{b}$ es igual a la ordenada del vector $\boldsymbol{a}$ y la ordenada del vector $\boldsymbol{b}$ es igual a cero.

1.27. Calcúlense las longitudes de las diagonales de un paralelogramo construido sobre los vectores $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}$ y $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{k} - 2\boldsymbol{j}$.

1.28. Hállese la proyección del vector $\boldsymbol{a}$ sobre la dirección del vector $\boldsymbol{b}$, y la proyección del vector $\boldsymbol{b}$ sobre la dirección del vector $\boldsymbol{a}$, si $|\boldsymbol{a}| = 2$, $|\boldsymbol{b}| = 1$, $\widehat{(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b})} = 120°$.

1.29. Hállese el producto escalar de los vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$, si $|\boldsymbol{a}| = 4$, $|\boldsymbol{b}| = 6$ y $\widehat{(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b})}$ es igual a: a) 45°; b) 0°; c) 135°; d) 90°; e) 180°.

1.30. El ángulo entre los vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ es igual a 120°. Sabiendo que $|\boldsymbol{a}| = 5$, $|\boldsymbol{b}| = 4$, calcúlense: a) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$; b) $\boldsymbol{a}^2$; c) $(\boldsymbol{a} - 2\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{b})$; d) $(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b})^2$; e) $(7\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})^2$.

1.31. Calcúlense:

a) $\boldsymbol{i}\cdot(\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}) + \boldsymbol{j}\cdot(3\boldsymbol{i} - \boldsymbol{k}) + \boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j})$;

b) $\boldsymbol{i}\cdot(\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}) + \boldsymbol{j}\cdot(\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}) + \boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k})$.

1.32. Calcúlese $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} + \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c} + \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}$, si $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} = 0$ y $|\boldsymbol{a}| = |\boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{c}| = 1$.

1.33. Se dan los vectores $\boldsymbol{a} = (4; -2; 0)$ y $\boldsymbol{b} = (1; 2; 3)$. Calcúlense: a) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$; b) $\boldsymbol{b}^2$; c) $(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b})^2$; d) $(3\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b})\cdot(2\boldsymbol{a} + 3\boldsymbol{b})$.

1.34. Se da el vector $\boldsymbol{a} = (3; -4)$. Hállense las coordenadas de los vectores unitarios perpendiculares al vector $\boldsymbol{a}$.

1.35. Se da el vector $\boldsymbol{c} = (4; -7)$. Hállense las coordenadas de cualquier vector perpendicular al vector $\boldsymbol{c}$. ¿Cuántas soluciones tiene el problema?

1.36. Se da el vector $\boldsymbol{a} = (1; 2; -3)$. Se sabe que la abscisa del vector $\boldsymbol{b}$ perpendicular a éste es igual a 3, y la ordenada es igual a 6; se requiere hallar la z-coordenada del vector $\boldsymbol{b}$.

1.37. Se da el vector $\boldsymbol{a} = (3; -4)$. Se sabe que la abscisa del vector $\boldsymbol{b}$ perpendicular a éste es igual a 8; determínese la ordenada del vector $\boldsymbol{b}$.

1.38. Se da el vector $\boldsymbol{a} = (5; 3)$. Se sabe que la ordenada del vector $\boldsymbol{b}$ perpendicular a éste es igual a 10; determínese la abscisa del vector $\boldsymbol{b}$.

1.39. Hállese el valor α con el cual los siguientes vectores son perpendiculares entre sí:

a) $\boldsymbol{a} = \alpha\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} + 4\boldsymbol{k}$ y $\boldsymbol{b} = 4\boldsymbol{i} + \alpha\boldsymbol{j} - 7\boldsymbol{k}$;

b) $\boldsymbol{a} = (\alpha; -3; 2)$ y $\boldsymbol{b} = (1; 2; -\alpha)$;

c) $\boldsymbol{a} = (0; -2; 7)$ y $\boldsymbol{b} = (\alpha, 14, 4)$.

1.40. Hállense los valores de α y β con los cuales los vectores $\boldsymbol{a} = (3; -1; \alpha)$ y $\boldsymbol{b} = (2; \beta; 1)$ son perpendiculares entre sí, si $|\boldsymbol{b}| = 3$.

1.41. En el plano xOy hállese el vector $\boldsymbol{b}$ perpendicular al vector $\boldsymbol{a} = 3\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j} + 5\boldsymbol{k}$, si $|\boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{a}|$.

1.42. Se dan dos vectores: $\boldsymbol{a} = (3; -1; 5)$ y $\boldsymbol{b} = (1; 2; -3)$. Hállese el vector $\boldsymbol{x}$ que es perpendicular al eje Oz y satisfaga las condiciones $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{a} = 9$, $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{b} = -4$.

1.43. Hállese el vector $\boldsymbol{b}$, colineal al vector $\boldsymbol{a}$, que satisfaga a la condición dada:

a) $\boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a} = 3$;

b) $\boldsymbol{a} = (-1; 2; 2)$, $\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a} = -2$.

1.44. Hállese el vector $\boldsymbol{b}$, cuya longitud es igual a 50, que es colineal al vector $\boldsymbol{a}$ y forma un ángulo agudo con el eje dado:

a) $\boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j} - 6\boldsymbol{k}$, eje Ox;

b) $\boldsymbol{a} = (6; -8; -7{,}5)$, eje Oz.

1.45. Se dan tres vectores: $\boldsymbol{a} = (2;\ -1;\ 3)$, $\boldsymbol{b} = (1;\ -3;\ 2)$, $\boldsymbol{c} = (3;\ 2;\ -4)$. Hállese el vector $\boldsymbol{x}$ que satisfaga las condiciones $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{a} = -5$, $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{b} = -11$, $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{c} = 20$.

1.46. Hállese el coseno del ángulo entre el vector $\boldsymbol{a} = (3;\ -4)$ y el eje Ox.

1.47. Hállense los cosenos de los ángulos entre el vector $\boldsymbol{a} = (3;\ -4;\ 12)$ y los ejes de coordenadas.

1.48. Hállese el ángulo entre las diagonales de un paralelogramo construido sobre los vectores $\boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}$ y $\boldsymbol{b} = -\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$.

1.49. Determínese el ángulo entre el vector $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$ y el eje de las abscisas, si $A\ (-2;\ 3)$, $B\ (0;\ 8)$, $C\ (5;\ 3)$ y $D\ (10;\ 5)$.

1.50. Determínese el ángulo entre los vectores: a) $\boldsymbol{i}$ y $\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$; b) $\boldsymbol{j}$ e $\boldsymbol{i} - \boldsymbol{k}$; c) $\boldsymbol{k}$ y $2\boldsymbol{j} - 3\boldsymbol{k}$.

1.51. Determínense las magnitudes de los ángulos en el triángulo con los vértices $A\ (5;\ 0;\ 0)$, $B\ (1;\ 1;\ 1)$ y $C\ (3;\ -1;\ 2)$.

1.52. Se dan tres vértices sucesivos del paralelogramo: $A\ (-3;\ -2;\ 0)$, $B\ (3;\ -3;\ 1)$ y $C\ (5;\ 0;\ 2)$. Hállense el cuarto vértice D y el ángulo entre los vectores $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{BD}$.

1.53. Se da el triángulo con los vértices en los puntos $A\ (3;\ -2;\ 1)$, $B\ (3;\ 0;\ 2)$ y $C\ (1;\ 2;\ 5)$. Calcúlese el ángulo entre la mediana $[BD]$ y el lado $[AC]$.

1.54. Se da el cuadrángulo con los vértices en los puntos $A\ (2;\ -3;\ 1)$, $B\ (1;\ 4;\ 0)$, $C\ (-4;\ 1;\ 1)$ y $D\ (-5;\ -5;\ 3)$. Hállese el ángulo entre las diagonales $[AC]$ y $[BD]$.

1.55. Se da un triángulo con los vértices en los puntos $A\ (-1;\ 4;\ 1)$, $B\ (3;\ 4;\ -2)$ y $C\ (5;\ 2;\ -1)$. Calcúlese el coseno del ángulo del vértice B.

1.56. Se dan los vectores $\boldsymbol{a} = (-2;\ 1;\ 1)$, $\boldsymbol{b} = (1;\ 5;\ 0)$, $\boldsymbol{c} = (2;\ 2;\ -1)$. Calcúlense: a) $\mathrm{pr}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}$; b) $\mathrm{pr}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}$; c) $\mathrm{pr}_{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}}\boldsymbol{c}$; d) $\mathrm{pr}_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c})$; e) $\mathrm{pr}_{\boldsymbol{a}}(2\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c})$.

1.57. Determínese, si es derecha o izquierda la terna de los vectores $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, si:

a) $\boldsymbol{a} = -\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{j}$; $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{k}$;

b) $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{i} - \boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}$;

c) $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{i} - \boldsymbol{j}$; $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{k}$

($\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ forman la terna derecha).

1.58. Hállese el vector $[\boldsymbol{a};\ \boldsymbol{b}]$ y represéntese, si:

a) $\boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{b} = 3\boldsymbol{j}$;

b) $\boldsymbol{a} = 3\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b} = 4\boldsymbol{k}$;

c) $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b} = 2\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j} + 4\boldsymbol{k}$.

1.59. Hállese el área del paralelogramo construido sobre los vectores $\boldsymbol{a} = (3;\ 4)$ y $\boldsymbol{b} = (4;\ -3)$.

1.60. Se dan los vectores $\boldsymbol{a} = (1;\ -2;\ 3)$, $\boldsymbol{b} = (2;\ 2;\ -1)$, $\boldsymbol{c} = (0;\ 1;\ -2)$, $\boldsymbol{d} = (2;\ -1;\ 0)$. Calcúlense: a) $[\boldsymbol{a};\ \boldsymbol{b}]$; b) $[\boldsymbol{a};\ \boldsymbol{c}]$; c) $[\boldsymbol{b};\ \boldsymbol{c}]$; d) $[\boldsymbol{a};\ \boldsymbol{d}]$; e) $[(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b});\ \boldsymbol{c}]$; f) $[(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b});\ \boldsymbol{c}]$; g) $[(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b});\ (\boldsymbol{d} - \boldsymbol{c})]$; h) $[(\boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{d});\ \boldsymbol{c}]$; i) $[(2\boldsymbol{a} - 3\boldsymbol{b});\ (\boldsymbol{c} + \boldsymbol{d})]$; j) $[(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b});\ (3\boldsymbol{c} + 2\boldsymbol{d})]$.

1.61. Hállese el área del triángulo con los vértices en los puntos $A\ (0;\ 2;\ 6)$, $B\ (4;\ 0;\ 0)$ y $C\ (8;\ -2;\ 0)$.

1.62. Se dan los vértices del paralelogramo: $A\ (1;\ -2)$, $B\ (-2;\ 2)$, $C\ (4;\ 10)$ y $D\ (7;\ 6)$. Calcúlese su área y altura.

1.63. La fuerza $\boldsymbol{F} = 2\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j} + 4\boldsymbol{k}$ está aplicada al punto

M (1; 5; —2). Hállese la magnitud del momento de fuerza F respecto al origen de coordenadas.

1.64. Los vectores r_1, r_2, r_3 que forman la terna derecha son perpendiculares entre sí. Sabiendo que $|r_1| = 7$, $|r_2| = 5$, $|r_3| = 6$, calcúlese $(r_1; r_2; r_3)$.

1.65. Demuéstrese que $(r_1 + r_2; r_2 + r_3; r_3 + r_1) = 2(r_1; r_2; r_3)$.

1.66. Demuéstrese que los vectores r_1, r_2, r_3 que satisfacen la condición $[r_1; r_2] + [r_2; r_3] + [r_3; r_1] = 0$, son coplanares.

1.67. Calcúlese el volumen del paralelepípedo construido sobre los vectores $r_1 = a + b + c$, $r_2 = a - b + c$ y $r_3 = a - b - c$.

1.68. Muéstrese que el volumen de un paralelepípedo construido sobre las diagonales de las caras del paralelepípedo dado, que tienen un vértice común, es igual al volumen duplicado del paralelepípedo dado.

1.69. Determínese el producto mixto $(a; b; c)$ de los vectores $a = (0; 3; -1)$, $b = (5; 0; 0)$, $c = (7; -2; 4)$.

1.70. Determínese si son coplanares los vectores $a = (8; 5; -13)$, $b = (-4; 2; 8)$, $c = (4; 7; -4)$; si son coplanares, qué terna formarán, derecha o izquierda.

1.71. Determínese si son coplanares los vectores $a = (-2; -1; -3)$, $b = (-1; 4; 6)$, $c = (1; 5; 9)$.

1.72. Hállese el volumen del paralelepípedo construido sobre los vectores $a = (1; 2; 3)$, $b = (-1; 3; 4)$, $c = (2; 5; 2)$.

1.73. El centro de gravedad de una barra homogénea se encuentra en el punto M (2; —4), uno de sus extremos, en el punto A (—1; 1). Determínense las coordenadas del otro extremo de la barra.

1.74. Se da el triángulo con los vértices en los puntos A (2; —5), B (1; —2) y C (4; 7). Hállese el punto de intersección de la bisectriz del $\angle B$ con el lado AC.

1.75. Demuéstrese, que si en la pirámide triangular regular $SABC$ unimos el vértice A con el punto M de intersección de las medianas de la cara opuesta, entonces $(AM) \perp (BC)$.

1.76. En el triángulo ABC los puntos A_1, B_1, C_1 son los puntos medios de los lados BC, AC, AB. Demuéstrese que los puntos de intersección de las medianas de los triángulos ABC y $A_1B_1C_1$ coinciden.

1.77. Demuéstrese que los puntos medios de las bases del trapecio y el punto de intersección de las prolongaciones de sus lados laterales pertenecen a una misma recta.

1.78. Los puntos M y N son los puntos medios de los lados AB y CD del cuadrángulo $ABCD$. Demuéstrese, que los puntos medios de las diagonales de los cuadrángulos $AMND$ y $BMNC$ son vértices de un paralelogramo o están situados en una misma recta.

1.79. Calcúlese el trabajo efectuado por la resultante de dos fuerzas F_1 (5; —1; 3) y F_2 (—3; —2; 4), cuando un punto material se desplaza rectilíneamente de la posición B (10; 8; —2) a la posición C (9; 4; 1).

1.80. La fuerza $F = 3i + k$ está aplicada al punto A (2; 1; 4). Hállense el momento y la magnitud del momento de esta fuerza respecto al punto O (2; —1; 3).

1.81. Dos fuerzas F_1 y F_2 están aplicadas a un punto material, además, $|F_1| + |F_2| = 4$N y $(\widehat{F_1; F_2}) = 120°$. Hállese el valor mínimo de la magnitud de la resultante de estas fuerzas.

1.82. Determínese si se encuentran en un mismo plano los cuatro puntos siguientes:

a) M_1 (5; 2; −2), M_2 (6; −3; 1), M_3 (0; 4; 3), M_4 (2; 0; 4).

b) M_1 (3; 5; 1), M_2 (2; 4; 7), M_3 (1; 5; 3), M_4 (4; 4; 5).

1.83. Los vértices de una pirámide se encuentran en los puntos A (2; 1; −1), B (3; 0; 1), C (2; −1; 3) y D (0; −7; 0). Hállese la altura de la pirámide bajada desde el vértice D.

1.84. En el plano se dan el cuadrángulo $ABCD$ y el punto M. Demuéstrese, que los puntos simétricos al punto M respecto a los puntos medios de los lados del cuadrángulo dado, son vértices de un paralelogramo.

1.85. Demuéstrese que las alturas de un triángulo arbitrario se intersecan en un solo punto.

1.86. Demuéstrese, que para que las diagonales de un cuadrángulo sean perpendiculares entre sí, es necesario y suficiente que las sumas de los cuadrados de las longitudes de sus lados opuestos sean iguales.

1.87. Un ciclista se mueve con una velocidad de 15 km/h en dirección norte y le parece, que el viento (que sopla con una velocidad de 9 km/h de cierto sitio del nordeste) está dirigido bajo un ángulo de 15° respecto a la línea de su movimiento. Hállese la dirección real del viento.

1.88. En el lado AB del triángulo ABC se da el punto P, por el cual están trazadas las rectas paralelas a sus medianas AM_1 y BM_2. Estas rectas cortan los lados respectivos del triángulo en los puntos A_1 y B_1. Demuéstrese que el punto medio del segmento A_1B_1, el punto P y el punto de intersección de las medianas del triángulo dado están situados en una misma recta.

Capítulo II

RECTAS EN EL PLANO

§ 26. Ecuaciones con dos variables y su gráfico

Se denomina solución de la ecuación con dos variables cualquier par ordenado de valores de las variables que reduce dicha ecuación a una igualdad exacta.

Por ejemplo, el par ordenado de los números (4; —5) (en el cual, en el primer lugar está escrito el valor de la

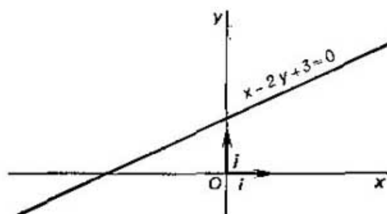


Fig. 71

variable x, y en el segundo, el valor de la variable y) es la solución de la ecuación $3x + 2y - 2 = 0$, ya que $3 \cdot 4 + 2 \cdot (-5) - 2 = 0$. El par de números (—5; 4) no es la solución de la ecuación dada, ya que $3 \cdot (-5) + 2 \cdot 4 - 2 \neq 0$.

Si elegimos arbitrariamente los valores x y hallamos de la ecuación los valores y que corresponden a ellos, se puede obtener un conjunto de pares de números que serán las soluciones de esta ecuación. Tales pares de valores de las variables x e y se puede considerar como coordenadas de los puntos en el plano. El conjunto de los puntos construidos según estas coordenadas se denomina *gráfico* de la ecuación dada.

Así pues, el gráfico de las ecuaciones con dos variables es el conjunto de todos los puntos, cuyas coordenadas sirven de soluciones de esta ecuación.

Por ejemplo, expresando y por x de la ecuación $x - 2y + 3 = 0$ obtendremos

$$y = \frac{1}{2}(x + 3).$$

Se sabe que el gráfico de esta función es una recta. Por consiguiente, el gráfico de la ecuación $x - 2y + 3 = 0$ es la misma recta (fig. 71).

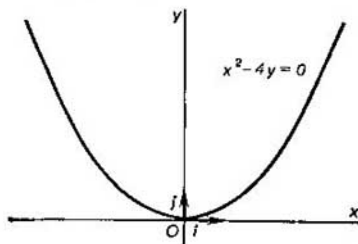


Fig. 72

Exactamente igual, expresando y mediante x, de la ecuación $x^2 - 4y = 0$ obtendremos

$$y = \frac{1}{4}x^2.$$

Por consiguiente, el gráfico de la ecuación $x^2 - 4y = 0$ es la parábola (fig. 72).

§ 27. Ecuaciones canónicas y paramétricas de la recta

La posición de una recta en el plano puede ser definida del modo siguiente:

1) la recta l pasa por el punto M_0 paralelamente al vector $\boldsymbol{a}$. El punto M_0 se denomina a veces punto inicial (fig. 73, a);

2) la recta l pasa por los puntos M_1 y M_2 (fig. 73, b);

3) la recta l pasa por el punto M_0 perpendicularmente al vector $\boldsymbol{n}$ (fig. 73, c);

4) la recta l atraviesa el punto M_0 y forma con el vector $\boldsymbol{i}$ (fig. 73, d) el ángulo φ.

Se denomina *vector director* de la recta l, cualquier vector $\boldsymbol{a} \neq 0$, paralelo a esta recta.

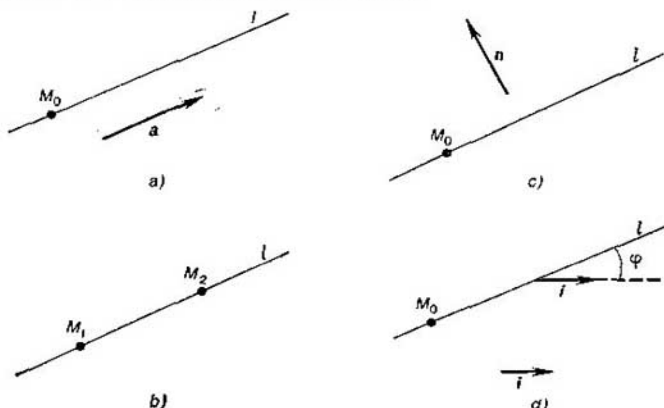


Fig. 73

De esta definición se deduce que cada recta tiene cuantos quiera vectores directores y todos ellos son colineales entre sí (fig. 74).

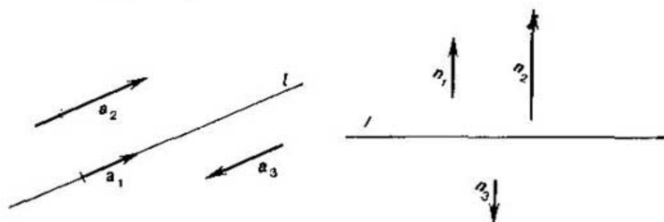


Fig. 74 Fig. 75

Se denomina *vector normal* de la recta cualquier vector $\boldsymbol{n} \neq 0$ perpendicular a la recta l.

De esta definición se deduce que cada recta tiene cuantos quiera vectores normales y todos ellos son colineales entre sí (fig. 75).

Si en la recta l tomamos dos puntos fijados cualesquiera M_1 y M_2, el vector $\overrightarrow{M_1M_2}$ será el vector director de la recta M_1M_2. Señalemos que por vector director se puede tomar también el vector $\overrightarrow{M_2M_1}$, ya que $\overrightarrow{M_1M_2} = -\overrightarrow{M_2M_1}$ y, en general, cualquier vector $k \cdot \overrightarrow{M_1M_2}$, donde $k \neq 0$.

Supongamos que la recta l está definida por el punto inicial M_0 y por el vector director $\boldsymbol{a}$ (fig. 76). Sea que M es cualquier punto; designemos su radio vector por $\boldsymbol{r}$. El vector $\overrightarrow{M_0M} = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0$ es paralelo a la recta cuando y sólo cuando el punto M está situado en esta recta. En este caso, el vector $\overrightarrow{M_0M}$ es colineal al vector $\boldsymbol{a}$. Por consiguiente, $\overrightarrow{M_0M} = t\boldsymbol{a}$, o

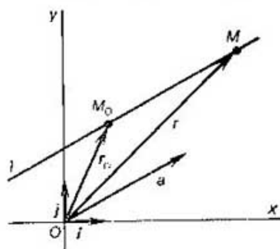


Fig. 76

$$\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0 = t\boldsymbol{a}. \qquad \vec{r} = \vec{r_0} + t\vec{a} \qquad (1)$$

La variable t en la fórmula (1) que toma distintos parámetros numéricos, se denomina *parámetro*, y la ecuación (1) se denomina *ecuación vectorial parámetrica* de la recta l.

Si designamos las coordenadas de los puntos M y M_0 con $(x;\ y)$ y $(x_0;\ y_0)$, y las coordenadas del vector $\boldsymbol{a}$ con $(a_1;\ a_2)$, la ecuación (1) puede escribirse en coordenadas:

$$x \cdot \boldsymbol{i} + y \cdot \boldsymbol{j} = (x_0 \cdot \boldsymbol{i} + y_0 \cdot \boldsymbol{j}) + t\,(a_1 \cdot \boldsymbol{i} + a_2 \cdot \boldsymbol{j})$$

o

$$x \cdot \boldsymbol{i} + y \cdot \boldsymbol{j} = (x_0 + a_1 t) \cdot \boldsymbol{i} + (y_0 + a_2 t) \cdot \boldsymbol{j}.$$

De aquí se deduce que

$$\begin{cases} x = x_0 + a_1 t, \\ y = y_0 + a_2 t. \end{cases} \qquad (2)$$

La ecuación (2) se denomina *ecuación paramétrica de la recta.*

Problema 1. Escríbanse las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el punto $M_0\ (3;\ -5)$ paralelamente al vector $\boldsymbol{a} = (4;\ 1)$.

△ Sustituyendo directamente las coordonadas del punto M_0 y las coordonadas del vector $\boldsymbol{a}$ en la ecuación (2) obtendremos

$$\begin{cases} x = 3 + 4t, \\ y = -5 + t. \end{cases} \blacktriangle$$

Problema 2. La recta l está definida por las ecuaciones

$$\begin{cases} x = 5 - 2t, \\ y = -2 + 6t. \end{cases}$$

Se requiere construir esta recta.

△ Para construir la recta hallemos dos puntos. Para determinar sus coordenadas hace falta tomar dos valores cualesquiera del parámetro t y sustituirlos en la ecuación de la recta. Si $t = 0$ obtenemos el punto M_0 (5; —2), y si $t = 1$, el punto M_1 (3; 4). Luego construimos los puntos M_0 y M_1 y (valiéndose de una regla) trazamos la recta buscada (fig. 77). ▲

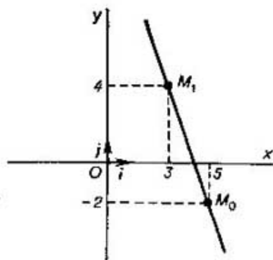


Fig. 77

Eliminemos el parámetro t de la ecuación (2). Esto es posible, ya que el vector $\boldsymbol{a} \neq 0$ y, por lo tanto, por lo menos una de sus coordenadas es diferente de cero.

Sea que $a_1 \neq 0$ y $a_2 \neq 0$, entonces

$$t = \frac{x - x_0}{a_1}, \quad t = \frac{y - y_0}{a_2}$$

y, por consiguiente,

$$\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2}. \tag{3}$$

La ecuación (3) se denomina *ecuación canónica de la recta* con el vector director $\boldsymbol{a} = (a_1;\ a_2)$.

Si $a_1 = 0$, $a_2 \neq 0$, las ecuaciones (2) toman la forma

$$\begin{cases} x = x_0, \\ y = y_0 + a_2 t. \end{cases}$$

Estas ecuaciones definen la recta paralela al eje Oy que pasa por el punto $M_0(x_0; y_0)$. La ecuación canónica de tal recta tiene la forma

$$x = x_0. \tag{4}$$

Si $a_1 \neq 0$, $a_2 = 0$ las ecuaciones (2) tomarán la forma

$$\begin{cases} x = x_0 + a_1 t \\ y = y_0. \end{cases}$$

Estas ecuaciones definen la recta que es paralela al eje Ox y pasa por el punto $M_0(x_0; y_0)$. La ecuación canónica de tal recta tiene la forma

$$y = y_0. \tag{5}$$

Problema 3. Escríbase la ecuación canónica de la recta que pasa por el punto $M_0(-1; 1)$ y es paralela al vector $\boldsymbol{a} = (2; 3)$.

△ Poniendo las coordenadas del punto M_0 y las coordenadas del vector $\boldsymbol{a}$ en la ecuación (3), obtendremos

$$\frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{3}. \ \blacktriangle$$

Problema 4. Escríbase la ecuación canónica de la recta que pasa por el punto $M_0(3; 4)$ paralelamente al vector $\boldsymbol{a} = (0; 5)$.

△ Según la fórmula (4) se tiene $x = 3$. ▲

§ 28. Ecuación de una recta que pasa por dos puntos dados

Sea que se dan dos puntos M_1 y M_2 con las coordenadas $(x_1; y_1)$ y $(x_2; y_2)$. Para formar la ecuación de la recta que pasa por los puntos M_1 y M_2 tomemos por vector director de esta recta el vector $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{M_1M_2}$.

La ecuación canónica de la recta (27) que pasa por el punto $M_1(x_1; y_1)$ y tiene el vector director $\boldsymbol{a} = (a_1; a_2)$ tiene la forma

$$\frac{x-x_1}{a_1} = \frac{y-y_1}{a_2}.$$

Al sustituir en esta ecuación las coordenadas del vector $a = \overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1;\ y_2 - y_1)$, obtendremos

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1}. \qquad (1)$$

Esta ecuación se denomina *ecuación de una recta que pasa por dos puntos.*

Si en la ecuación (1) uno de los denominadores se anula, para obtener una ecuación hay que igualar a cero el nomi-

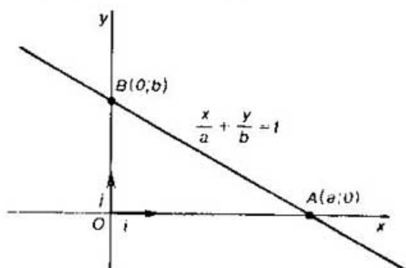


Fig. 78

nador respectivo. Por ejemplo, si $x_2 - x_1 = 0$, la ecuación buscada será $x - x_1 = 0$. En este caso, los puntos M_1 y M_2 se encuentran a la misma distancia del eje Oy, y la recta M_1M_2 es paralela a este eje.

Frecuentemente se necesita formar la ecuación de una recta que pasa por dos puntos, uno de los cuales está situado en el eje Ox y el otro, en el eje Oy.

Sea que en los ejes de coordenadas se dan los puntos $A\ (a;\ 0)$ y $B\ (0;\ b)$, y sea que $a \neq 0$, $b \neq 0$ (fig. 78). Considerando que en la fórmula (1) $x_1 = a$, $y_1 = 0$, $x_2 = 0$, $y_2 = b$, obtenemos

$$\frac{x-a}{0-a} = \frac{y-0}{b-0}$$

ó

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1. \qquad (2)$$

Esta ecuación se denomina *ecuación segmentaria de una recta*, ya que los números a y b indican, qué segmentos son cortados por la recta en los ejes de coordenadas.

Problema 1. Escríbase la ecuación de la recta que pasa por los dos puntos M_1 (3; —2) y M_2 (5; 1).

△ Una vez sustituidas las coordenadas de los puntos M_1 y M_2 en la ecuación (1) obtendremos

$$\frac{x-3}{5-3}=\frac{y+2}{1+2}$$

ó $3x-2y-13=0$. ▲

Problema 2. Los vértices de un triángulo se encuentran en los puntos A (—3; 2), B (1; 5) y C (5; —7). Escríbase la ecuación de la mediana de este triángulo que pasa a través del vértice A. Constrúyanse el triángulo y la mediana.

△ Sea que el punto A_1 (x_1; y_1) es el punto medio del lado BC. Para hallar sus coordenadas utilicemos las fórmulas de división de un segmento por la mitad (el § 25 las fórmulas (5)):

$$x_1=\frac{1+5}{2}=3,$$

$$y_1=\frac{5-7}{2}=-1.$$

Poniendo ahora en la fórmula (1) $x_1=3$; $y_1=-1$, $x_2=-3$, $y_2=2$, obtendremos la ecuación de la recta AA_1, es decir, la ecuación buscada de la mediana,

$$\frac{x-3}{-3-3}=\frac{y+1}{2+1} \quad ó \quad x+2y-1=0.$$

En la figura 79 está representado el triángulo ABC y la mediana AA_1. ▲

Problema 3. Escríbase la ecuación segmentaria de la recta $y=\frac{3}{4}x-3$. Calcúlese el área del triángulo formado por esta recta y los ejes de coordenadas.

△ Transformemos la ecuación dada del modo siguiente:

$$\frac{3}{4}x-y=3, \quad \frac{x}{4}-\frac{y}{3}=1.$$

Como resultado obtendremos la ecuación

$$\frac{x}{4}+\frac{y}{-3}=1,$$

que es la ecuación segmentaria de la recta dada.

El triángulo formado por la recta dada y los ejes de coordenadas es un triángulo rectangular con los catetos iguales a 4 y 3 (fig. 80), por lo tanto, su área es igual a $\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 = 6$ (unidades cuadradas). ▲

Problema 4. Escríbase la ecuación de una recta que pasa por el punto A (4; —3) de manera que el área del triángulo

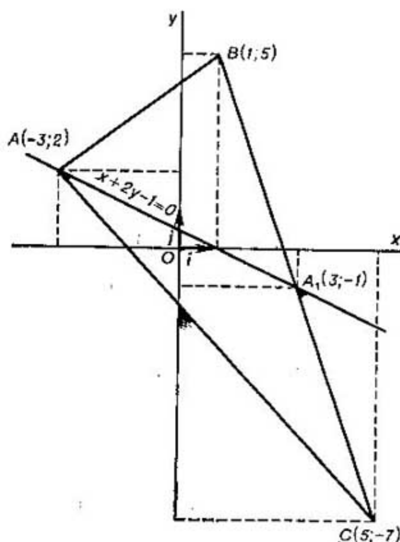


Fig. 79

formado por esta recta y los ejes de coordenadas sea igual a 3 unidades cuadradas.

△ Apliquemos la ecuación segmentaria de una recta. Sea que $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ es la ecuación de la recta buscada. Entonces, como el punto A (4; —3) está situado en la recta, a y b satisfacen la ecuación

$$\frac{4}{a} - \frac{3}{b} = 1$$

ó

$$4b - 3a = ab.$$

El área del triángulo formado por esta recta y los ejes de coordenadas es, evidentemente, igual a $\frac{1}{2}\mid a\mid\cdot\mid b\mid$, por lo tanto, a y b también satisfacen la ecuación

$$\mid a\mid\cdot\mid b\mid = 6.$$

Por consiguiente, para hallar la ecuación de una recta es suficiente resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 4b-3a=ab, \\ |ab|=6. \end{cases}$$

Fig. 80

El sistema de ecuaciones obtenido es, evidentemente, equivalente a los dos sistemas de ecuaciones simples siguientes:

$$\begin{cases} 4b-3a=6, \\ ab=6 \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} 4b-3a=-6 \\ ab=-6. \end{cases}$$

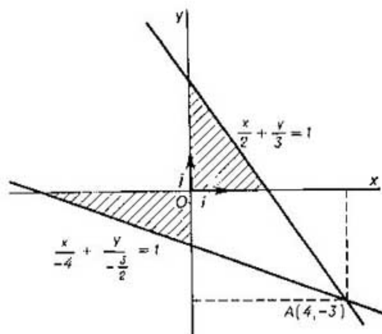


Fig. 81

Del primer sistema hallamos $a_1 = 2$, $b_1 = 3$ y $a_2 = -4$, $b_2 = -\frac{3}{2}$; el segundo sistema no tiene soluciones. Así

pues, el problema tiene dos soluciones (fig. 81)

$$\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1 \quad \text{y} \quad \frac{x}{-4}+\frac{y}{-\frac{3}{2}}=1$$

ó

$$3x+2y-6=0 \quad \text{y} \quad 3x+8y+12=0. \ \blacktriangle$$

§ 29. Ecuación de una recta que pasa por el punto dado perpendicularmente al vector dado

Sea que se da cierto punto M_0 y el vector $\boldsymbol{n}$. Tracemos por el punto M_0 la recta l perpendicularmente al vector $\boldsymbol{n}$ (fig. 82). Sea que M es un punto arbitrario. El punto M

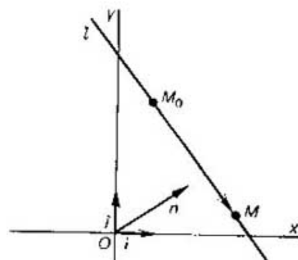


Fig. 82

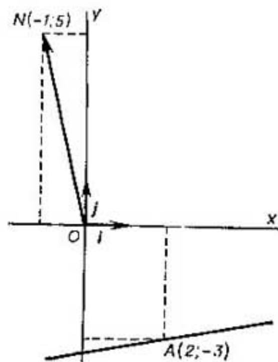


Fig. 83

está situado en la recta l cuando, y sólo cuando el vector $\overrightarrow{M_0M}$ es perpendicular al vector $\boldsymbol{n}$, para lo cual es necesario y suficiente que el producto escalar de los vectores $\boldsymbol{n}$ y $\overrightarrow{M_0M}$ sea igual a cero:

$$\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{M_0M}=0. \tag{1}$$

Para expresar la última igualdad en coordenadas introduzcamos un sistema cartesiano rectangular de coordenadas.

Sea que los puntos M_0 y M tienen las coordenadas $(x_0;\ y_0)$ y $(x;\ y)$. Entonces, $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0;\ y - y_0)$. Designemos

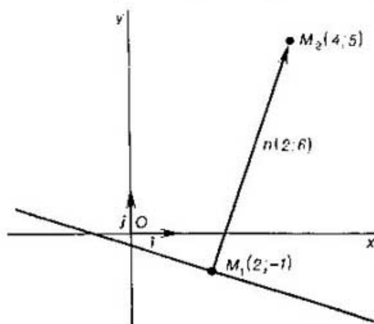


Fig. 84

las coordenadas del vector normal $\boldsymbol{n}$ por $(A;\ B)$. Ahora se puede escribir la igualdad (1) así:

$$A\ (x - x_0) + B\ (y - y_0) = 0. \tag{2}$$

La ecuación (2) *es la ecuación de la recta l que pasa por el punto dado* $M_0\ (x_0,\ y_0)$ *perpendicularmente al vector dado* $\boldsymbol{n} = (A;\ B)$.

Problema 1. Escríbase la ecuación de una recta que pasa por el punto $A\ (2;\ -3)$ perpendicularmente al vector $\boldsymbol{n} = (-1;\ 5)$ (fig. 83).

△ Aplicando la fórmula (2), hallamos la ecuación de la recta dada:

$$-1\cdot(x - 2) + 5\cdot(y + 3) = 0$$

o, definitivamente, $x - 5y - 17 = 0$. ▲

Problema 2. Se dan los puntos $M_1\ (2;\ -1)$ y $M_2\ (4;\ 5)$. Escríbase la ecuación de una recta que pasa por el punto M_1 perpendicularmente al vector $\overrightarrow{M_1M_2}$.

△ El vector normal de la recta buscada $\boldsymbol{n} = \overrightarrow{M_1M_2}$ tiene las coordenadas (2; 6) (fig. 84). Por consiguiente, según la fórmula (2) obtendremos la ecuación

$$2\ (x - 2) + 6\ (y + 1) = 0$$

ó $x + 3y + 1 = 0$. ▲

Problema 3. En el triángulo con los vértices en los puntos $M_1(-5;\ 2)$, $M_2(5;\ 6)$ y $M_3(1;\ -2)$ está trazada la mediana M_1A_1. Se requiere escribir la ecuación de la recta que pasa por el punto A_1 perpendicularmente a la mediana M_1A_1 (fig. 85).

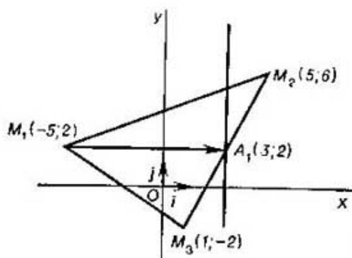


Fig. 85

△ Se puede tomar por vector normal de la recta buscada el vector $\boldsymbol{n}=\overrightarrow{M_1A_1}$. Determinemos sus coordenadas. El punto A_1 es el punto medio del segmento M_2M_3, por lo tanto, si $(x_1;\ y_1)$ son sus coordenadas, $x_1=\frac{5+1}{2}=3$, e $y_1=\frac{6-2}{2}=2$. Entonces el vector normal $\boldsymbol{n}=\overrightarrow{M_1A_1}$ tiene las coordenadas $(8;\ 0)$. Por consiguiente, la ecuación

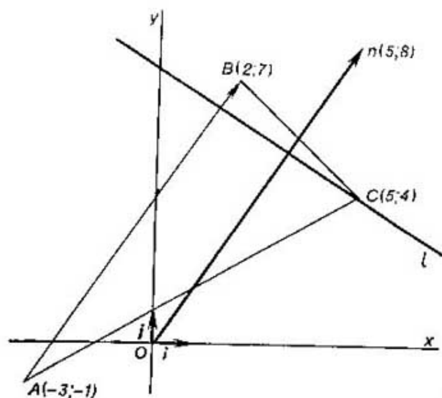


Fig. 86

buscada de la recta tiene la forma

$$8(x-3)+0(y-2)=0 \quad \text{ó} \quad x=3. \quad \blacktriangle$$

Problema 4. Se da el triángulo con los vértices en los puntos $A(-3; -1)$, $B(2; 7)$ y $C(5; 4)$. Se requiere formar la ecuación de la recta que pasa por el vértice C perpendicularmente al lado AB (fig. 86).

△ Por vector normal de la recta buscada se puede tomar el vector $\boldsymbol{n} = \overrightarrow{AB}$. Puesto que $\boldsymbol{n} = (2 - (-3); 7 - (-1)) = (5; 8)$, sustituyendo las coordenadas del punto C y las coordenadas del vector $\boldsymbol{n}$ en la fórmula (2), obtendremos

$$5(x-5) + 8(y-4) = 0.$$

o, definitivamente, $5x + 8y - 57 = 0$. ▲

§ 30. Ecuación general de una recta

Sea que se da una recta arbitraria. Elijamos en ésta un cierto punto $M_0(x_0; y_0)$ y supongamos que $\boldsymbol{n} = (A; B)$ es un vector normal arbitrario de esta recta. Entonces (ver 29) la ecuación de esta recta será la ecuación

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0.$$

Escribámosla así:

$$Ax - Ax_0 + By - By_0 = 0.$$

Al designar con C el número $-(Ax_0 + By_0)$, obtendremos

$$Ax + By + C = 0. \qquad (1)$$

Así pues, toda recta del plano se define por la ecuación (1), es decir, por una ecuación lineal con dos variables.

Demostremos ahora que toda ecuación lineal es la ecuación de una recta.

En efecto, en la ecuación (1) por lo menos uno de los coeficientes A o B es diferente de cero, en caso contrario esta ecuación no será lineal. Sea que, por ejemplo, $B \neq 0$, entonces la ecuación (1) puede ser escrita en la forma

$$A(x-0) + B\left(y + \frac{C}{B}\right) = 0. \qquad (2)$$

De acuerdo con el párrafo anterior la ecuación (2) y, por consiguiente, la ecuación (1) definen la recta que pasa por el punto $\left(0; -\frac{C}{B}\right)$ y es perpendicular al vector $\boldsymbol{n} = (A; B)$.

La ecuación $Ax + By + C = 0$ se denomina *ecuación general de la recta.*

Señalemos que en la ecuación $Ax + By + C = 0$ el coeficiente A, cuando x es una variable, es la primera coordenada del vector normal de la recta y el coeficiente B, cuando y es una variable, es la segunda coordenada del vector normal de la recta.

Problema 1. Señalar los vectores normales para las rectas definidas por las ecuaciones:

$$3x - 4y + 5 = 0, \quad y = \frac{2}{5}x + 17, \quad x = 5.$$

△ El vector normal de la primera recta es el vector $n = (3; -4)$, de la segunda, el vector $n = \left(\frac{2}{5}; -1\right)$, de la tercera, el vector $n = (1; 0)$. ▲

Examinemos, cómo se sitúa la recta respecto al sistema de coordenadas en función de los valores A, B, C de la ecuación general de la recta.

1. Si en la ecuación general de la recta $A = 0$, la ecuación puede escribirse en la forma $By + C = 0$ o $y = -\frac{C}{B}$.

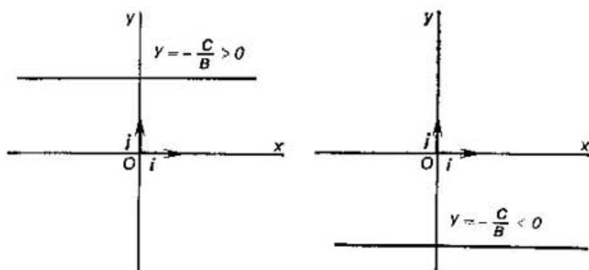


Fig. 87

Esto significa que todos los puntos de la recta tienen la misma ordenada $\left(-\frac{C}{B}\right)$. Por consiguiente, la recta es paralela al eje Ox (fig. 87).

Si $A = 0$ y $C = 0$, la ecuación toma la forma $y = 0$, es decir, es la ecuación del eje Ox.

2. Si en la ecuación (1) $B = 0$, la ecuación de la recta puede escribirse en la forma $Ax + C = 0$ ó $x = -\frac{C}{A}$.

Esto quiere decir que todos los puntos de la recta tienen la misma abscisa $\left(-\frac{C}{A}\right)$. Por consiguiente, la recta es paralela al eje Oy (fig. 88).

Si $B = 0$ y $C = 0$, la ecuación toma la forma $x = 0$, es decir, es la ecuación del eje Oy.

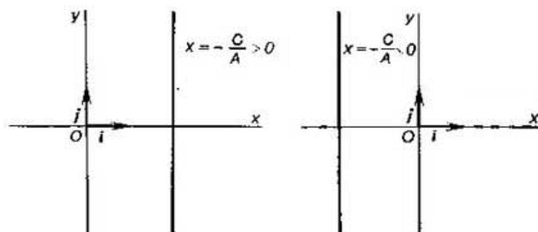


Fig. 88

3. Si $C = 0$, la ecuación (1) toma la forma $Ax + By = 0$. Las coordenadas del punto O (0; 0) satisfacen esta ecuación y, por consiguiente, la recta l definida por esta ecuación pasa por el origen de coordenadas (fig. 89).

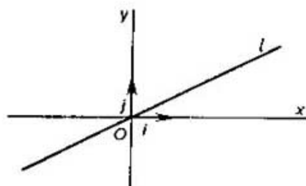


Fig. 89

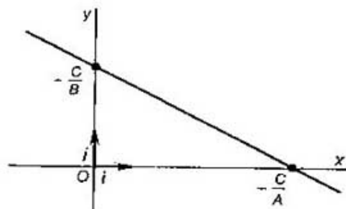


Fig. 90

4. Si $A \neq 0$, $B \neq 0$ y $C \neq 0$, la recta no es paralela ni al eje Ox, ni al eje Oy y no pasa por el origen de coordenadas (fig. 90). En este caso la ecuación (1) se reduce al tipo de ecuación segmentaria: $\frac{x}{-\frac{C}{A}} + \frac{y}{-\frac{C}{B}} = 1$, y, por consiguiente, la recta definida por la ecuación (1) pasa por los puntos $\left(-\frac{C}{A};\ 0\right)$ y $\left(0;\ -\frac{C}{B}\right)$.

Problema 2. ¿Cómo están situadas las rectas: a) $x - y = 0$; b) $x + y = 0$; c) $3x - 12 = 0$; d) $5y + 20 = 0$; e) $3x + 4y = 0$? Constrúyanse estas rectas.

a) Puesto que la ecuación de la recta no contiene un término independiente, la recta pasa por el origen de coor-

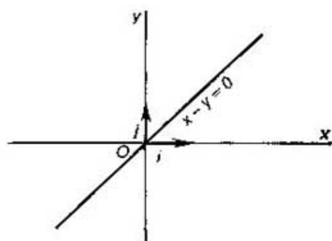


Fig. 91

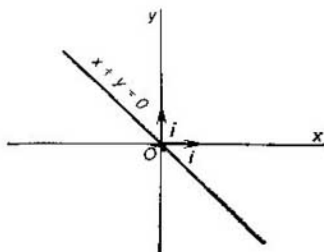


Fig. 92

denadas. Como para cualquier punto de la recta la abscisa es igual a la ordenada, la recta es la bisectriz del primero y tercero ángulos de coordenadas (fig. 91).

b) La ecuación de la recta no contiene un término independiente, por consiguiente, la recta pasa por el origen de

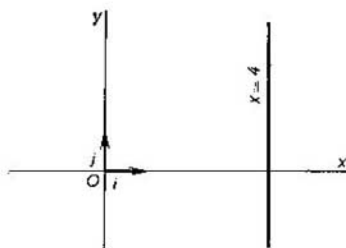
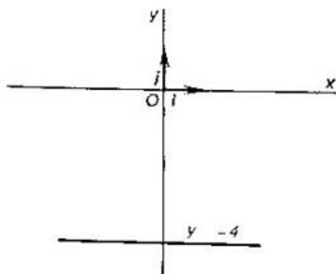


Fig. 93



Figs 94

coordenadas. Puesto que para cada punto la abscisa y ordenada son iguales en valor absoluto, pero tienen los signos contrarios, esta recta es la bisectriz del segundo y cuarto ángulos de coordenadas (fig. 92).

c) Realizadas las simplificaciones la ecuación de esta recta será la ecuación $x = 4$. La recta es paralela al eje de las ordenadas y pasa por el punto (4; 0) (fig. 93).

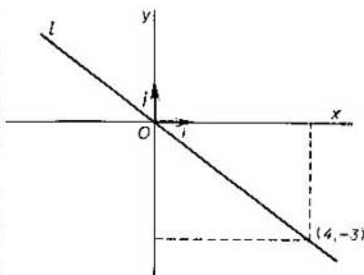


Fig. 95

d) La ecuación de esta recta puede escribirse en la forma $y = -4$. La recta es paralela al eje de las abscisas y pasa por el punto (0; —4) (fig. 94).

e) Puesto que en la ecuación está ausente el término independiente, la recta pasa por el origen de coordenadas. Para construir tal recta, es necesario hallar las coordenadas de cualquier otro punto más. Por ejemplo, sea que $x = 4$, entonces de la ecuación se deduce que para este punto $y = -3$. Tracemos la recta a través del origen de coordenadas O (0; 0) y por el punto (4; —3) (fig. 95). ▲

§ 31. Ecuación de una recta con un coeficiente angular

Sea que en un plano que contiene un sistema cartesiano rectangular de coordenadas la recta l pasa por el punto M_0

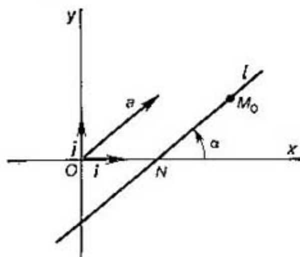


Fig. 96

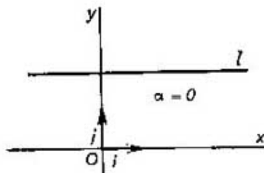


Fig. 97

paralelamente al vector director $\boldsymbol{a}$ (fig. 96). Si la recta l corta el eje Ox (en el punto N), por ángulo entre la recta l y el eje Ox se entenderá el ángulo α, en el que es necesario

girar el eje Ox en torno al punto N en sentido antihorario, para que el eje Ox coincida con la recta l. (Se tiene en cuenta un ángulo menor de 180°.) Este ángulo se denomina *ángulo de inclinación* de la recta. Si la recta l es paralela al eje Ox, el ángulo de inclinación se toma igual a cero (fig. 97).

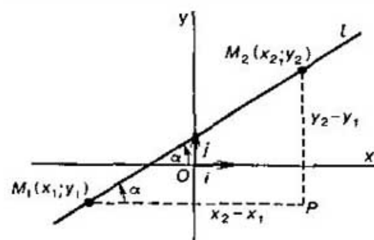


Fig. 98

La tangente del ángulo de inclinación de una recta se denomina *coeficiente angular* y se designa habitualmente con la letra k:

$$\operatorname{tg} \alpha = k.$$

Si $\alpha = 0$, también $k = 0$; esto significa que la recta es paralela al eje Ox y su coeficiente angular es igual a cero.

Si $\alpha = 90°$, entonces $k = \operatorname{tg} \alpha$ no tiene sentido: esto quiere decir que la recta es perpendicular al eje Ox (es decir, es paralela al eje Oy) y no tiene un coeficiente angular.

El coeficiente angular de una recta puede ser calculado, si son conocidas las coordenadas de dos puntos cualesquiera de esta recta. Sean dados dos puntos de la recta: $M_1\ (x_1;\ y_1)$ y $M_2\ (x_2;\ y_2)$ y supongamos que, por ejemplo, $0 < \alpha < 90°$ y $x_2 > x_1$, $y_2 > y_1$ (fig. 98). Entonces del triángulo rectangular M_1PM_2 hallemos $k = \operatorname{tg} \alpha = \frac{|M_2P|}{|M_1P|} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

Así pues,

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}. \qquad (2)$$

Análogamente se demuestra que la fórmula (2) es válida en el caso de $90° < \alpha < 180°$.

La fórmula (2) pierde la validez, si $x_2 - x_1 = 0$, es decir, si la recta l es paralela al eje Oy. Para tales rectas el coeficiente angular no existe.

Problema 1. Determínese el coeficiente angular de la recta que pasa por los puntos $M_1\ (3;\ -5)$ y $M_2\ (5;\ -7)$.

△ Sustituyendo las coordenadas de los puntos M_1 y M_2 en la fórmula (2), obtendremos

$$k = \frac{-7-(-5)}{5-3} \quad \text{ó} \quad k = -1. \ ▲$$

Problema 2. Determínese el coeficiente angular de la recta que pasa por los puntos M_1 (3; 5) y M_2 (3; —2).

△ Puesto que $x_2 - x_1 = 0$, la igualdad (2) pierde la validez. Para esta recta no existe un coeficiente angular. La recta M_1M_2 es paralela al eje Oy. ▲

Problema 3. Determínese el coeficiente angular de la recta que pasa por el origen de coordenadas y el punto M_1 (3; —5).

△ En este caso el punto M_2 coincide con el origen de coordenadas. Aplicando la fórmula (2), obtendremos

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0-(-5)}{0-3} = -\frac{5}{3};\ k = -\frac{5}{3}.\ ▲$$

Escribamos la ecuación de la recta con el coeficiente angular k que pasa por el punto M_1 $(x_1;\ y_1)$. Según la fórmula (2) el coeficiente angular de una recta se halla por las coordenadas de sus dos puntos. En nuestro caso el punto M_1 está dado, y por segundo punto se puede tomar un punto cualquiera M $(x;\ y)$ de la recta buscada.

Si el punto M está situado en la recta que pasa por el punto M_1 y tiene el coeficiente angular k, en virtud de la fórmula (2) se tiene

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = k. \tag{3}$$

Si el punto M no está situado en la recta, la igualdad (3) no es válida. Por consiguiente, la igualdad (3) es la ecuación de la recta que pasa por el punto M_1 $(x_1;\ y_1)$ con el coeficiente angular k; esta ecuación se escribe habitualmente en la forma

$$y - y_1 = k\,(x - x_1). \tag{4}$$

Si la recta corta el eje Oy en cierto punto (0; b), la ecuación (4) toma la forma

$$y - b = k\,(x - 0)$$

es decir,

$$y = kx + b. \tag{5}$$

Esta ecuación se denomina *ecuación de la recta con el coeficiente angular k y con la ordenada inicial b.*

Problema 4. Hállese el ángulo de inclinación de la recta $\sqrt{3}x + 3y - 7 = 0$.

△ Reduzcamos la ecuación dada a la forma

$$y=-\frac{1}{\sqrt{3}}x+\frac{7}{3}.$$

Por consiguiente, $k=\operatorname{tg}\alpha=-\frac{1}{\sqrt{3}}$, de aquí que $\alpha=$ $=150°$. ▲

Problema 5. Escríbase la ecuación de la recta que pasa por el punto $P(3;\ -4)$ con un coeficiente angular $k=\frac{2}{5}$.

△ Al sustituir $k=\frac{2}{5}$, $x_1=3$, $y_1=-4$ en la ecuación (4), obtendremos

$$y-(-4)=\frac{2}{5}(x-3) \quad \text{ó} \quad 2x-5y-26=0. \ ▲$$

Problema 6. Hágase la ecuación de la recta que pasa por el punto $Q(-3;\ 4)$ y que forma el ángulo de 30° con la dirección positiva del eje Ox.

△ Si $\alpha=30°$, $k=\operatorname{tg}30°=\frac{\sqrt{3}}{3}$. Al sustituir los valores de x_1, y_1 y k en la ecuación (4), obtendremos

$$y-4=\frac{\sqrt{3}}{3}(x+3) \quad \text{ó} \quad \sqrt{3}\,x-3y+12+3\sqrt{3}=0. \ ▲$$

§ 32. Cálculo del ángulo entre las rectas, definidas por ecuaciones generales. Condiciones de paralelismo y de perpendicularidad de dos rectas

Sea que las rectas l_1 y l_2 están definidas por las ecuaciones generales

$$A_1x+B_1y+C_1=0 \quad \text{y} \quad A_2x+B_2y+C_2=0.$$

Designemos con φ la magnitud del ángulo entre las rectas l_1 y l_2 y con ψ, el ángulo entre los vectores normales $\boldsymbol{n}_1=(A_1;\ B_1)$ y $\boldsymbol{n}_2=(A_2;\ B_2)$ de estas rectas. Si $\psi\leqslant 90°$ (fig. 99, *a*), $\varphi=\psi$. Si $\psi>90°$ (fig. 99, *b*), entonces $\varphi=$ $=180°-\psi$. Es fácil ver que en cualquier caso es válida la igualdad

$$\cos\varphi=|\cos\psi|.$$

De acuerdo con la fórmula (1) del 20 tenemos

$$\cos\psi = \cos(\widehat{n_1; n_2}) = \frac{n_1 \cdot n_2}{|n_1| \cdot |n_2|}$$

y, por consiguiente, el coseno del ángulo φ entre las rectas l_1 y l_2 puede ser calculado según la fórmula

$$\cos\varphi = \frac{|n_1| \cdot |n_2|}{|n_1| \cdot |n_2|}. \tag{1}$$

Al escribir el miembro derecho de la fórmula (1) por medio de las coordenadas obtendremos

$$\cos\varphi = \frac{|A_1 + A_2 + B_1B_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} + \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}. \tag{2}$$

Problema 1. Calcúlese el ángulo entre las rectas

$$-3x - 4y + 25 = 0 \quad \text{y} \quad 4x + 3y - 25 = 0.$$

△ Según la fórmula (2) obtendremos

$$\cos\varphi = \frac{|-3\cdot4 - 4\cdot3|}{\sqrt{3^2+4^2}\,\sqrt{4^2+3^2}} = \frac{24}{25},$$

de donde según la tabla de los cosenos hallamos $\varphi \approx 16°$. ▲

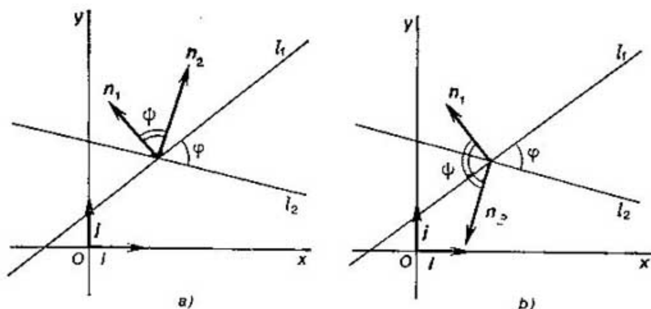


Fig. 99

Las rectas con los vectores normales n_1 y n_2:

a) son paralelas cuando, y sólo cuando los vectores n_1 y n_2 son colineales;

b) son perpendiculares cuando, y sólo cuando los vectores $\boldsymbol{n}_1$ y $\boldsymbol{n}_2$ son perpendiculares, o sea, cuando $\boldsymbol{n}_1 \cdot \boldsymbol{n}_2 = 0$.

De aquí obtenemos las condiciones necesarias y suficientes de paralelismo y perpendicularidad de dos rectas definidas por las ecuaciones generales.

Para que las rectas

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0 \quad \text{y} \quad A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

sean:

a) paralelas, es necesario y suficiente que

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \quad \text{ó} \quad \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0;$$

b) perpendiculares, es necesario y suficiente que

$$A_1A_2 + B_1B_2 = 0.$$

Problema 2. Entre los siguientes pares de rectas:

$$\begin{aligned} 6x - 15y + 7 = 0 \quad &\text{y} \quad 10x + 4x - 1 = 0 \\ 5x - 7y - 4 = 0 \quad &\text{y} \quad 3x + 2y - 13 = 0 \\ x - 2y + 1 = 0 \quad &\text{y} \quad 2x - 4y + 1 = 0 \end{aligned}$$

indíquense las paralelas o las perpendiculares.

△ Para el primer par de rectas $A_1A_2 + B_1B_2 = 6 \cdot 10 + (-15) \cdot 4 = 0$, es decir, es válida la condición de perpendicularidad. Las rectas son perpendiculares.

Para el segundo par de rectas

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & -7 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \quad \text{y}$$
$$A_1A_2 + B_1B_2 = 5 \cdot 3 + (-7) \cdot 2 \neq 0.$$

Por consiguiente, las rectas del segundo par no son ni paralelas ni perpendiculares.

Para el tercer par de rectas

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = 0,$$

es decir, las rectas son paralelas. ▲

Si las rectas

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0 \quad \text{y} \quad A_2x + B_2y + C_2 = 0 \qquad (3)$$

tienen un punto común, sus coordenadas satisfacen cualquiera de las ecuaciones (3). Por lo tanto, para hallar los puntos comunes de las rectas dadas es necesario resolver el sistema

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + B_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0. \end{cases} \qquad (4)$$

Si las rectas (3) no son paralelas, es decir, si $\begin{vmatrix} A_1 B_1 \\ A_2 B_2 \end{vmatrix} \neq 0$, ellas se cortan. Las coordenadas del punto de intersección se hallan del sistema (4) que en este caso tiene una solución única.

Si las rectas (2) son paralelas, es decir, si $\begin{vmatrix} A_1 B_1 \\ A_2 B_2 \end{vmatrix} = 0$, ellas o bien coinciden y, entonces, el sistema (4) tiene un conjunto infinito de soluciones (las coordenadas de cada punto de la recta son la solución del sistema) o bien no coinciden y, entonces, el sistema (4) no tiene soluciones.

§ 33. Cálculo del ángulo entre las rectas definidas por las ecuaciones con coeficientes angulares

Sea que las rectas l_1 y l_2 están dadas por las ecuaciones con coeficientes angulares k_1 y k_2:

$$y = k_1x + b_1 \quad \text{e} \quad y = k_2x + b_2.$$

Por vectores normales de estas rectas se puede tomar $n_1 = (k_1; -1)$ y $n_2 = (k_2; -1)$. La fórmula (2) del § 32 en este caso tiene la forma

$$\cos\varphi = \frac{|k_1k_2 + 1|}{\sqrt{k_1^2+1} + \sqrt{k_2^2+1}}. \qquad (1)$$

Po medio de esta fórmula se puede hallar el ángulo φ entre las rectas con coeficientes angulares k_1 y k_2.

Si $k_1 = k_2$, $\cos\varphi = 1$ y $\varphi = 0$, es decir, las rectas son paralelas.

Si $k_1k_2 + 1 = 0$, $\cos\varphi = 0$ y $\varphi = \frac{\pi}{2}$, es decir, las rectas son perpendiculares.

Por consiguiente, las condiciones necesarias y suficientes de paralelismo y perpendicularidad de dos rectas definidas por las ecuaciones con coeficientes angulares se enuncian de la manera siguiente:

para que las rectas $y = k_1x + b_1$ e $y = k_2x + b_2$ sean

a) paralelas, es necesario y suficiente que $k_1 = k_2$;

b) perpendiculares, es necesario y suficiente que $k_1k_2 = -1$.

Deduzcamos una fórmula más (más simple) para el ángulo entre las rectas definidas por las ecuaciones con coeficientes angulares.

Puesto que $0 \leqslant \varphi \leqslant 90°$, $\operatorname{sen}\varphi \geqslant 0$ y

$$\operatorname{sen}\varphi = \sqrt{1-\cos^2\varphi}.$$

Al sustituir la expresión para $\cos\varphi$ de la fórmula (1), obtendremos

$$\operatorname{sen}\varphi = \sqrt{1 - \frac{(k_1k_2+1)^2}{(k_1^2+1)(k_2^2+1)}} = \frac{|k_1-k_2|}{\sqrt{k_1^2+1} + \sqrt{k_2^2+1}}.$$

De aquí y de la fórmula (1) se deduce que para la tangente del ángulo entre las rectas con coeficientes angulares k_1 y k_2 queda válida la fórmula

$$\operatorname{tg}\varphi = \left|\frac{k_1-k_2}{k_1k_2+1}\right|. \tag{2}$$

Si el denominador en la fórmula (2) se anula, es decir, si $k_1k_2 + 1 = 0$, entonces, como se ha indicado anteriormente, las rectas son perpendiculares y $\varphi = 90°$.

Problema 1. Hállese el ángulo entre las rectas $y = -\frac{x}{7} + 2$ e $y = \frac{3}{4}x + 5$.

△ Según la fórmula (2), considerando que $k_1 = -\frac{1}{7}$, $k_2 = \frac{3}{4}$, hallamos

$$\operatorname{tg}\varphi = \left|\frac{-\frac{1}{7}-\frac{3}{4}}{-\frac{1}{7}\cdot\frac{3}{4}+1}\right| = 1.$$

El ángulo entre las rectas es igual a 45°. ▲

Problema 2. Calcúlese el ángulo entre las rectas $y = -\frac{x}{4} + 1$ e $y = 8x + 7$.

△ Considerando que en la fórmula (2) $k_1 = -\frac{1}{4}$, $k_2 = 8$, obtenemos

$$\operatorname{tg}\varphi = \left|\frac{-\frac{1}{4} - 8}{-\frac{1}{4}\cdot 8 + 1}\right| = \frac{33}{4} = 8{,}25.$$

Según la tabla de las tangentes hallamos $\varphi \approx 83°$. ▲

Problema 3. Demuéstrese que las rectas $y = -\frac{x}{3} - 3$ e $y = 3x - 1$ son perpendiculares.

△ Comprobemos si se cumple la condición de perpendicularidad de las rectas:

$$k_1 k_2 = \left(-\frac{1}{3}\right)\cdot 3 = -1.$$

Por consiguiente, las rectas son perpendiculares. ▲

§ 34 *. Cálculo del ángulo entre las rectas definidas por las ecuaciones canónicas

Examinemos el problema de cálculo del ángulo entre las rectas l_1 y l_2 definidas en un cierto sistema cartesiano rectangular de coordenadas por las ecuaciones

$$\frac{x - x_1}{a_1} = \frac{y - y_1}{a_2} \quad y \quad \frac{x - x_2}{b_1} = \frac{y - y_2}{b_2}.$$

Designemos con φ la magnitud del ángulo entre las rectas l_1 y l_2, y con ψ, la magnitud del ángulo entre los vectores directores $\boldsymbol{a} = (a_1;\ a_2)$ y $\mathbf{b} = (b_1;\ b_2)$ de estas rectas. Es fácil ver que si $\psi \leqslant 90°$ (fig. 100, *a*), $\varphi = \psi$, y si $\psi > 90°$ (fig. 100, *b*), $\varphi = 180° - \psi$. Por lo tanto, siempre tiene lugar la igualdad

$$\cos\varphi = |\cos\psi|.$$

Según la fórmula (1) del § 20 obtenemos

$$\cos\psi = \cos(\widehat{\boldsymbol{a};\ \boldsymbol{b}}) = \frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|}$$

y, por consiguiente,

$$\cos\varphi = \frac{|a\cdot b|}{|a|\cdot|b|}$$

o

$$\cos\varphi = \frac{|a_1b_1 + a_2b_2|}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}\,\sqrt{b_1^2+b_2^2}}. \tag{1}$$

Problema 1. Calcúlese el ángulo entre las rectas

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y+3}{5} \quad \text{y} \quad \frac{x}{2} = \frac{y+1}{-3}$$

y construyamos estas rectas.

△ Según la fórmula (1) hallamos

$$\cos\varphi = \frac{|1\cdot 3 - 5\cdot 3|}{\sqrt{1^2+5^2}\,\sqrt{2^2+(-3)^2}} = \frac{13}{\sqrt{26}\,\sqrt{13}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Por consiguiente, el ángulo entre las rectas es igual a 45°.

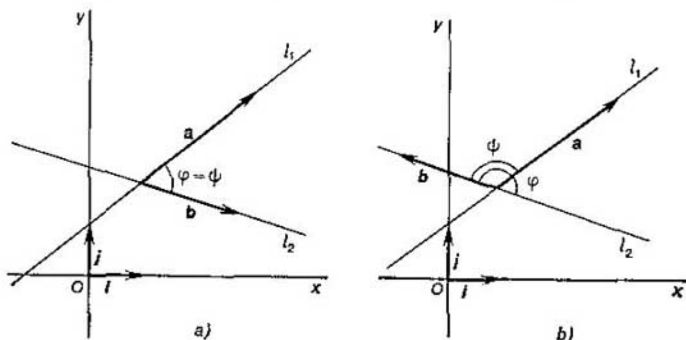


Fig. 100

Construir una recta es más fácil por dos puntos. De lao ecuaciones se ve que la primera recta pasa por el punta (1; —3) y la segunda, por el punto (0; —1). La primera recta corta el eje Ox en el punto $\left(\frac{8}{5};\ 0\right)$ y la segunda, en el punto $\left(-\frac{2}{3};\ 0\right)$. Las rectas dadas están representadas en la figura 101. ▲

Las rectas con los vectores directores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$:

a) son paralelas, cuando los vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ son colineales;

b) son perpendiculares, cuando los vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ son perpendiculares, es decir, cuando $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = 0$.

De aquí obtenemos las condiciones necesarias y suficientes de paralelismo y perpendicularidad de dos rectas definidas por las ecuaciones canónicas.

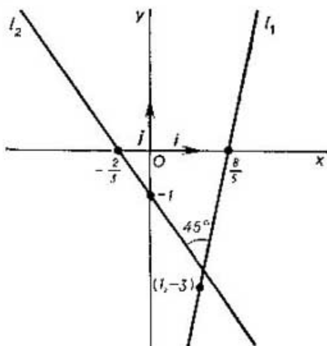


Fig. 101

Para que las rectas

$$\frac{x-x_1}{a_1} = \frac{y-y_1}{a_2}$$

y

$$\frac{x-x_2}{b_1} = \frac{y-y_2}{b_2}$$

sean

a) paralelas, es necesario y suficiente que

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} \quad \text{ó} \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = 0;$$

b) perpendiculares, es necesario y suficiente que

$$a_1\cdot b_1 + a_2\cdot b_2 = 0.$$

Problema 2. Entre los siguientes pares de rectas indíquense los pares de rectas paralelas o perpendiculares:

$$\frac{x-7}{3} = \frac{x}{6} \quad \text{y} \quad \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{2},$$

$$\frac{x-5}{3} = \frac{y}{6} \quad \text{y} \quad \frac{x+2}{-2} = \frac{x-6}{1}.$$

△ Para el primer par de rectas $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$, ya que $\frac{3}{1} = \frac{6}{2}$. Por consiguiente, las rectas son paralelas.

Para el segundo par de rectas la condición de $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$ no se cumple y, por lo tanto, las rectas no son paralelas.

Comprobemos si se cumple la condición de perpendicularidad de las rectas: $a_1\cdot b_1 + a_2\cdot b_2 = 3\cdot(-2) + 6\cdot 1 = 0$. Por consiguiente, las rectas son perpendiculares. ▲

§ 35*. Ecuación normalizada de una recta

Sea que l es una recta arbitraria (fig. 102). Designemos con p la distancia entre el origen de coordenadas y la recta l, y con φ, el ángulo entre el eje Ox y el vector normal $\boldsymbol{n}$

Calcularemos el ángulo del eje Ox en sentido antihorario. Es evidente que la posición de la recta en el plano se define por completo por las magnitudes p y φ. Expresemos por medio de p y φ los coeficientes de la ecuación de la recta l.

Sea que M_0 es el punto de intersección de la recta l con la recta que es perpendicular a ésta, que pasa por el origen de coordenadas, $\boldsymbol{n}_0$ es el vector unitario normal de la

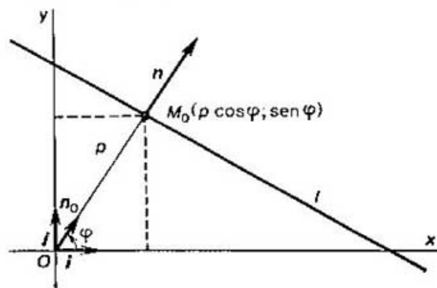


Fig. 102

recta l, es decir, $|\boldsymbol{n}_0| = 1$. Las coordenadas del punto M_0 y del vector $\boldsymbol{n}_0$ se expresan por medio de las magnitudes dadas p y φ del modo siguiente:

$$M_0\,(p \cos \varphi;\ p \operatorname{sen} \varphi), \quad \boldsymbol{n}_0 = (\cos \varphi;\ \operatorname{sen} \varphi).$$

En el §29 fue deducida la ecuación de la recta que pasa por el punto $(x_0;\ y_0)$ con el vector normal $(A;\ B)$:

$$A\,(x - x_0) + B\,(y + y_0) = 0.$$

Sustituyendo en esta ecuación las coordenadas del punto M_0 y del vector $\boldsymbol{n}_0$, obtendremos

$$\cos \varphi\,(x - p \cos \varphi) + \operatorname{sen} \varphi\,(y - p \operatorname{sen} \varphi) = 0,$$

ó

$$x \cos \varphi + y \operatorname{sen} \varphi - p\,(\cos^2 \varphi + \operatorname{sen}^2 \varphi) = 0.$$

Como resultado obtenemos la ecuación

$$x \cos \varphi + y \operatorname{sen} \varphi - p = 0,$$

que se denomina *ecuación normalizada de una recta*.

En una ecuación normalizada todos los coeficientes tienen sentido geométrico: los coeficientes con las variables

x e y son coordenadas del vector unitario normal de una recta; el término independiente $(-p)$ es igual a la distancia entre el origen de coordenadas y la recta tomada con el signo «menos». Señalemos una vez más, que en una ecuación normalizada de una recta el término independiente es menor o igual a cero.

Examinemos por ejemplo, la ecuación $x - y + 5\sqrt{2} = 0$. No es una ecuación normalizada: el vector $(1; -1)$ no es un vector unitario, ya que $|\boldsymbol{n}| = \sqrt{2} \neq 1$; el término independiente de la ecuación es positivo. Multipliquemos ambos miembros de la ecuación por $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Entonces, la ecuación de la recta tomará la forma

$$-\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{y}{\sqrt{2}} - 5 = 0,$$

y se hará normalizada, ya que ahora el vector $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ es, ciertamente, unitario, y el término independiente de la ecuación es negativo. El vector normal de la recta en cuestión forma con el eje Ox tal ángulo φ que $\cos\varphi = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\operatorname{sen}\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}$, o sea, $\varphi = 135°$. La recta pasa a la distancia de cinco unidades de longitud del origen de coordenadas.

La ecuación general de una recta

$$Ax + By + C = 0$$

siempre se puede reducir a una forma normalizada (normalizar). Si $C \leqslant 0$, multiplicando por el factor normalizador $\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}$ ambos miembros de la ecuación, obtendremos la ecuación

$$\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}x + \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}y + \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}} = 0,$$

que es normalizada, ya que el vector $\left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}; \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\right)$ como se comprueba fácilmente, es un vector unitario, y el término independiente de la ecuación es menor o igual a cero.

El caso de $C > 0$ se reduce al anterior multiplicando por -1 ambos términos de la ecuación. Por lo tanto, si $C > 0$, por factor normalizador se debe tomar el número $-\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}$.

Problema. Calcúlese la distancia entre el origen de coordenadas y la recta $6x - 8y + 25 = 0$.

△ Puesto que $C = 25 > 0$, al multiplicar ambos miembros de la ecuación por el factor normalizador $-\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}} = -\frac{1}{\sqrt{36+64}} = -\frac{1}{10}$, obtendremos la ecuación normalizada de la recta dada

$$-0{,}6x + 0{,}8y - 2{,}5 = 0.$$

Teniendo en cuenta el sentido geométrico del término independiente de la ecuación normalizada de una recta, llegamos a la conclusión de que la distancia buscada es igual a 2,5. ▲

§ 36. Distancia de un punto a una recta

Sea que se dan el punto M_1 $(x_1; y_1)$ y la recta l definida por su ecuación normalizada

$$x \cos \varphi + y \operatorname{sen} \varphi - p = 0.$$

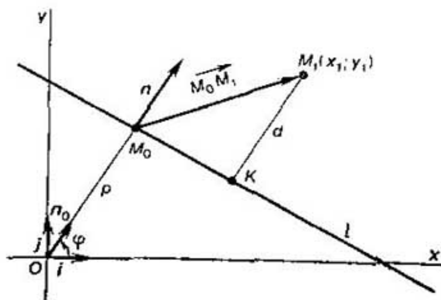


Fig. 103

Hallemos la distancia d del punto M_1 a la recta l, es decir, la longitud del segmento M_1K, donde K es la proyección del punto M_1 sobre la recta l (fig. 103).

Supongamos que, como en el párrafo 35, M_0 ($p\cos\varphi$; $p\,\mathrm{sen}\,\varphi$) es el punto de intersección de la recta l con la recta perpendicular a ella, que pasa por el origen de coordenadas; $\boldsymbol{n}_0 = (\cos\varphi;\ \mathrm{sen}\,\varphi)$ es el vector normal unitario de la recta l.

La distancia buscada d es igual al módulo de la proyección del vector $\overrightarrow{M_0M_1}$ sobre la dirección del vector $\overrightarrow{KM_1}$ o, puesto que $\overrightarrow{KM_1}$ y $\boldsymbol{n}_0$ son colineales, sobre la dirección del vector $\boldsymbol{n}_0$. Así pues,

$$d = |\,\mathrm{pr}_{\boldsymbol{n}_0}\overrightarrow{M_0M_1}\,|.$$

Expresemos la proyección del vector $\overrightarrow{M_0M_1}$ sobre la dirección del vector $\boldsymbol{n}_0$ por medio del producto escalar de estos vectores. Conforme a la fórmula (3) del § 17 obtendremos

$$d = |\,\mathrm{pr}_{\boldsymbol{n}_0}\overrightarrow{M_0M_1}\,| = |\overrightarrow{M_0M_1}\cdot\boldsymbol{n}_0\,|.$$

Puesto que $\overrightarrow{M_0M_1} = (x_1 - p\cos\varphi;\ y_1 - p\,\mathrm{sen}\,\varphi)$ y $\boldsymbol{n}_0 = (\cos\varphi;\ \mathrm{sen}\,\varphi)$, entonces
$d = |\,(x_1 - p\cos\varphi)\cos\varphi + (y_1 - p\,\mathrm{sen}\,\varphi)\,\mathrm{sen}\,\varphi\,| = |\,x_1\cos\varphi + y_1\,\mathrm{sen}\,\varphi - p\,(\cos^2\varphi + \mathrm{sen}^2\varphi)|$ y definitivamente

$$d = |\,x_1\cos\varphi + y_1\,\mathrm{sen}\,\varphi - p\,|. \tag{1}$$

Así pues, *la distancia de un punto a una recta es igual al módulo del número que se obtiene como resultado de la sustitución en el primer miembro de la ecuación normalizada de una recta de las coordenadas del punto dado.*

Problema 1. Determínese la distancia del punto M (3; 2) a la recta $4x - 3y + 14 = 0$.

△ Normalizamos la ecuación de la recta. En el caso dado el factor normalizador es el número $-\frac{1}{\sqrt{4^2+(-3)^2}} = -\frac{1}{5}$. Por lo tanto, la ecuación $-\frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y - \frac{14}{5} = 0$ será la ecuación normalizada de la recta dada. Según la fórmula (1) hallamos la distancia

$$d = \left|-\frac{4}{5}\cdot 3 + \frac{3}{5}\cdot 2 - \frac{14}{5}\right| = \frac{|-12+6-14\,|}{5} = 4. \ \blacktriangle$$

Problema 2. Hállese la distancia entre las rectas paralelas $24x - 10y + 39 = 0$ e $y = \frac{12}{5}x - \frac{26}{5}$.

△ Para determinar la distancia entre dos rectas paralelas es suficiente elegir en una de ellas un punto cualquiera y hallar luego la distancia de este punto a otra recta.

El punto M (0; 3,9) está situado en la primera recta, ya que $24 \cdot 0 - 10 \cdot 3{,}9 + 39 = 0$. Para lo segunda recta $\frac{12}{5}x - y - \frac{26}{5} = 0$ el factor normalizador es igual a

$$\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{12}{5}\right)^2 + (-1)^2}} = \frac{5}{13},$$

por lo tanto, su ecuación normalizada será como sigue:

$$\frac{12}{13}x - \frac{5}{13}y - 2 = 0.$$

La distancia buscada d la hallamos según la fórmula (1):

$$d = \left| \frac{12}{13} \cdot 0 - \frac{5}{13} \cdot 3{,}9 - 2 \right| = \left| -\frac{3}{5} - 2 \right| = 3{,}5. \ ▲$$

Problemas para el capítulo II

2.1. Determínese si el punto (—1; 2) pertenece al gráfico de las ecuaciones:

a) $3x + 5y - 7 = 0$; b) $2x^2 - 3xy - 8 = 0$;
c) $4x^2 - y^2 - 1 = 0$; d) $3x^2 - x + y = 6$.

2.2. Constrúyanse los gráficos de las ecuaciones:

a) $3x - 2y - 1 = 0$; b) $2x + 3y + 2 = 0$;
c) $4x^2 - 2y - 3 = 0$; d) $2x^2 - 4y - 1 = 0$;
e) $(x - 3)(x - 4) - y = 0$; f) $x^2 + y^2 = 1$.

2.3. ¿Es el punto (—3; 1) el punto de intersección de los gráficos de las ecuaciones:

a) $y - x = 4$ y $xy = -3$;
b) $x^2 - y^2 = 8$ y $3x + 12y = 1$?

2.4. Escríbanse las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el punto dado M_0, paralelamente al vector $\boldsymbol{a}$, si:

a) M_0 (—1; 2), $\boldsymbol{a} = (3; 2)$; b) M_0 (3; 1), $\boldsymbol{a} = (1; 0)$;
c) M_0 (3; —2), $\boldsymbol{a} = (1; 3)$; d) M_0 (2; 0), $\boldsymbol{a} = (0; -3)$.

2.5. Constrúyase la recta definida por las ecuaciones:

$$\text{a)} \begin{cases} x = 1 - t; \\ y = -3 + t; \end{cases} \qquad \text{b)} \begin{cases} x = -2t, \\ y = 3. \end{cases}$$

2.6. Constrúyase la recta que pasa por el punto A (0; 3), paralelamente al vector $\boldsymbol{a} = (2; 1)$.

2.7. Escríbase la ecuación canónica de la recta que pasa por el punto M_0, paralelamente al vector $\boldsymbol{a}$, si:

a) $M_0(3;\ -4)$, $\boldsymbol{a}=(1;\ -4)$; b) $M_0(1;\ 0)$, $\boldsymbol{a}=(0;\ 3)$;

c) $M_0\left(\frac{1}{2};\ 1,5\right)$, $\boldsymbol{a}=(-3;\ -2)$; d) $M_0(0;\ -3)$; $\boldsymbol{a}=(-4;\ 0)$.

2.8. Constrúyase la recta que pasa por el punto $E(4;\ -3)$, paralelamente al vector $\boldsymbol{i}$.

2.9. Escríbase la ecuación canónica de la recta que es paralela al eje Oy y pasa por el punto $M_0(2;\ -4)$.

2.10. Una recta está dada por la ecuación $\frac{x-3}{5}=\frac{y+7}{4}$. Indíquese un punto cualquiera de la recta y su vector director.

2.11. Escríbase la ecuación canónica de la recta que pasa por el punto de intersección de las rectas $2x+y-3=0$ y $5x-3y-2=0$ y es paralela al vector $\boldsymbol{j}$.

2.12. Escríbanse las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el punto de intersección de las rectas $2x+y=3$ y $3x-2y=4$ y es paralela al vector $\boldsymbol{a}=(-7;\ 11)$.

2.13. Escríbase la ecuación de la recta que pasa por dos puntos dados, si:

a) $M_1(-1;\ 6)$, $M_2(-2;\ -3)$; b) $M_1(-3;\ 2)$, $M_2(4;\ 3)$;

c) $M_1\left(\frac{2}{3};\ \frac{1}{5}\right)$, $M_2\left(\frac{5}{6};\ 0{,}3\right)$; d) $O(0;\ 0)$, $M(3;\ -2)$.

2.14. Para la recta $y=-\frac{2}{3}x+6$ escríbase su ecuación segmentaria.

2.15. Escríbase para la recta $3x-7y=5$ su ecuación segmentaria.

2.16. Hállense los puntos de intersección de la recta con los ejes de coordenadas y constrúyase esta recta:

a) $3x-2y-12=0$; b) $8x-3y+12=0$.

2.17. Se dan sucesivamente los vértices de un cuadrilátero convexo $A(-6;\ -2)$, $B(6;\ 7)$, $C(9;\ 3)$ y $D(1;\ -3)$. Determínese el punto de intersección de sus diagonales.

2.18. Calcúlese el área de un triángulo cortado por la recta $3x+4y-12=0$ desde el ángulo de coordenadas.

2.19. Escríbase la ecuación de una recta si el punto $M(2;\ 1)$ es el punto medio de su segmento, comprendido entre los ejes de coordenadas.

2.20. Una recta corta en los ejes de coordenadas en el primer cuadrante segmentos congruentes. Escríbase la ecuación de la recta, si el área del triángulo limitado por la recta y los ejes de coordenadas es igual a 18.

2.21. Escríbase la ecuación de una recta que pasa por el punto $B(0;\ 8)$, si el área del triángulo limitado por la recta y los ejes de coordenadas es igual a 16.

2.22. Determínese el área del triángulo limitado por la recta $5x+8y-40=0$ y los ejes de coordenadas.

2.23. Se da el triángulo con los vértices en los puntos $M(0;\ -2)$,

N (0; 2) y P (2; 4). Escríbanse las ecuaciones del lado MP, de la mediana NE y de la altura ND.

2.24. Se da el triángulo con los vértices en los puntos A (—5; —5), B (1; 7) y C (5; —1). Escríbanse las ecuaciones de los lados y medianas de este triángulo. Hállense las coordenadas del centro de gravedad de este triángulo.

2.25. ¿Cuál de las rectas $2x - 3y + 4 = 0$ y $x - y = 0$ corta en el eje de ordenadas el mayor segmento?

2.26. Un punto se mueve del origen de coordenadas con una velocidad de $v = 3i + 2j$. Hállese la trayectoria del movimiento del punto.

2.27. Constrúyase la recta que pasa por el punto C (3; —2) y es perpendicular al vector $n = (1; 4)$.

2.28. Escríbase la ecuación de la recta que pasa por el punto D (2; —3) perpendicularmente al vector $n = (4; -1)$.

2.29. Escríbase la ecuación de la recta que pasa por el punto A (3; —2), perpendicularmente al vector $n = (3; -2)$.

2.30. Constrúyase la recta que pasa por el origen de coordenadas y es perpendicular al vector $n = (3; 4)$.

2.31. La recta está definida por la ecuación $-3(x+5) + \frac{1}{7}(y-6) = 0$. Indíquese un punto cualquiera de la recta y su vector normal.

2.32. Destacar entre las rectas $A(x-2) + B(y+3) = 0$ aquella recta, que es perpendicular al vector $n = (4; 1)$.

2.33. Constrúyase la recta que pasa por el punto C (0; 3) perpendicularmente al vector j.

2.34. Escríbase la ecuación de la recta que pasa por el punto N (3; 4) y es perpendicular al vector j.

2.35. Escríbase la ecuación de la recta que pasa por el punto F y es perpendicular al vector $n = (2; 5)$, si el punto F es simétrico al punto K (3; —4) respecto al eje Ox.

2.36. Escríbase la ecuación de la recta que pasa por el punto medio del segmento AB y es perpendicular a él, si A (3; —2), B (5; —4).

2.37. A través de los puntos de intersección de la recta $5x - 2y - 10 = 0$ con los ejes de coordenadas están trazadas las perpendiculares a esta recta. Escríbanse sus ecuaciones.

2.38. En el triángulo con los vértices en los puntos M_1 (—4; —3), M_2 (—3; 4) y M_3 (2; 1) está trazada la mediana M_2D. Escríbase la ecuación de la recta que pasa por el punto M_2 y es perpendicular a la mediana M_2D.

2.39. Escríbanse las ecuaciones de las perpendiculares bajadas de los vértices del triángulo ABC, donde A (1; 3), B (—1; 0), $C\left(1; -\frac{4}{3}\right)$, a sus lados y convénzanse de que ellos se intersecan en un solo punto.

2.40. Escríbase la ecuación general de cada una de las rectas dadas y señálense las coordenadas del vector normal:

a) $\begin{cases} x = 3 + 2t, \\ y = -1 + t \end{cases}$ b) $\frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{4}$;

c) $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1$; d) $-\frac{1}{5}(x+10) + 3\left(y - \frac{2}{3}\right) = 0$.

2.41. La recta está definida por la ecuación $2x - 3y - 6 = 0$. Escríbanse: a) la ecuación segmentaria de esta recta; b) la ecuación canónica de esta recta; c) la ecuación paramétrica de esta recta.

2.42. Constrúyanse las rectas:

a) $3x - y + 5 = 0$; b) $x - 3y - 4 = 0$; c) $x + y + 1 = 0$.

2.43. Hállese el punto de intersección de los siguientes pares de rectas:

a) $3x - 2y - 5 = 0$, $5x + y - 17 = 0$;
b) $4x - 3y - 7 = 0$, $2x + 3y - 17 = 0$;
c) $2x + 5y - 29 = 0$, $5x + 2y - 20 = 0$;
d) $3x + 2y - 13 = 0$, $5x - 3y - 9 = 0$;
e) $x - y - 7 = 0$, $3x - 3y + 5 = 0$.

2.44. Se dan las ecuaciones de los lados del triángulo: $x - y + 4 = 0$, $4x + 2y - 19 = 0$, $5x + 6y + 9 = 0$. Hállense las coordenadas de sus vértices.

2.45. Se dan las ecuaciones de dos lados del paralelogramo

$$8x + 3y + 1 = 0, \quad 2x + y - 1 = 0$$

y la ecuación de una de sus diagonales

$$3x + 2y + 3 = 0.$$

Hállense las coordenadas de los vértices de este paralelogramo.

2.46. Se dan las ecuaciones de dos lados del paralelogramo $x - 4y + 11 = 0$, $2x + y - 5 = 0$ y la ecuación de una de sus diagonales $x - y - 1 = 0$. Hállense las coordenadas de los vértices de este paralelogramo.

2.47. ¿Cómo están situadas las rectas: $y - x = 0$; $2x + y = 0$; $4x - 12 = 0$; $6y + 24 = 0$; $2x - 3y = 0$; $x = -4{,}5$; $y = 8$? Constrúyanse estas rectas.

2.48. Escríbanse las ecuaciones de las rectas que pasan por el punto N (4; -3) y son paralelas a los ejes de coordenadas.

2.49. Escríbanse las ecuaciones de las rectas que pasan por el punto P (5; -2) y son perpendiculares a los ejes de coordenadas.

2.50. Escríbase la ecuación de la recta que pasa por el punto D (-3; -2) y el origen de coordenadas.

2.51. Calcúlese el coeficiente angular de la recta que pasa por los puntos A (3; 5) y B (-2; 4).

2.52. ¿Qué ángulo forma la recta que pasa por los puntos A (2; 0) y B (4; -2) con dirección positiva del eje de las abscisas?

2.53. Hállese el coeficiente angular de la recta que pasa por el punto D (-1; -1) y el origen de coordenadas.

2.54. Hállese la tangente de la inclinación de una recta que pasa por el punto C (-2; 1/2) y el origen de coordenadas.

2.55. Escríbanse las ecuaciones de dos rectas cualesquiera, pero tales, que la primera de ellas forme con la dirección positiva del eje de las abscisas un ángulo, dos veces mayor que la segunda.

2.56. Hállese el ángulo de inclinación de las rectas siguientes:

a) $3x + 3y - 7 = 0$; b) $2\sqrt{3}x - 2y + 5 = 0$;
c) $y + 10 = 0$; d) $x - 5 = 0$.

2.57. Se da la ecuación de la recta $\frac{x}{3} + \frac{y}{5} = 1$. Se requiere hallar la magnitud del ángulo entre esta recta y la dirección positiva del eje de las abscisas.

2.58. Hállese el coeficiente angular de la recta $3x - 7y + 2 = 0$ y constrúyala.

2.59. Hállese la tangente de la inclinación de la recta $3x - 4y + 13 = 0$ y determínese qué segmento corta ésta en el eje de ordenadas.

2.60. Determínese cuál de las rectas $2x - 3y + 4 = 0$ y $x - y = 0$ forma el mayor ángulo con la dirección positiva del eje de ordenadas.

2.61. La recta está dada por las ecuaciones paramétricas $x = -3 + 3t$, $y = 2 - 6t$. Escríbase la ecuación de esta recta con el coeficiente angular.

2.62. Calcúlese el ángulo entre las rectas:

a) $\frac{x-3}{3} = \frac{y}{-3\sqrt{3}}$ y $\frac{x+3}{-3} = \frac{y}{-3\sqrt{3}}$;

b) $\frac{x+4}{3} = \frac{y-6}{3\sqrt{3}}$ y $\frac{x-5}{3} = \frac{y+2}{-3\sqrt{3}}$;

c) $\frac{x+2}{24} = \frac{y-3}{7}$ y $\frac{x-1,5}{-15} = \frac{y+\frac{4}{3}}{8}$;

d) $\frac{x-6}{1} = \frac{y}{3}$ y $\frac{x-3}{3} = \frac{y-6}{1}$;

e) $\frac{x+0,5}{\sqrt{5}} = \frac{y-4}{2}$ y $\frac{x-3,5}{\sqrt{5}} = \frac{y+7}{2}$.

2.63. Señálense entre los siguientes pares de rectas los pares de rectas paralelas o perpendiculares:

a) $\frac{x+1}{2} = \frac{x-3}{5}$ y $\frac{x-7}{4} = \frac{y+2}{10}$;

b) $\frac{x-3}{2} = \frac{y}{3}$ y $\frac{x+1}{3} = \frac{y-7}{-2}$;

c) $\frac{x+0,3}{3} = \frac{y-0,4}{4}$ y $\frac{x-1}{12} = \frac{y+3}{-16}$.

2.64. ¿Para qué valor de b las rectas $\frac{x-2}{3} = \frac{y+4}{5}$ y $\frac{x+1}{b} = \frac{y-6}{30}$ son paralelas?

2.65. ¿Para qué valor de a las rectas $\frac{x+3}{2} = \frac{y-3}{a}$ y $\frac{x}{-3} = \frac{y+4}{24}$ son perpendiculares?

2.66. Calcúlese el ángulo entre las rectas:

a) $x + 5y + 9 = 0$ y $2x - 3y + 1 = 0$;
b) $2x + y - 5 = 0$ y $3x - y + 4 = 0$;
c) $2x - 3y + 12 = 0$ y $3x - y + 5 = 0$;

d) $2x - 3y - 7 = 0$ y $x + y - 2 = 0$;
e) $3x + 2y - 7 = 0$ y $2x - 3y + 9 = 0$.

2.67. Indíquense los pares de rectas paralelas o perpendiculares entre los siguientes pares de rectas:

a) $2x - 3y - 7 = 0$ y $4x - 6y + 9 = 0$;
b) $3x + 2y - 5 = 0$ y $4x - 6y + 9 = 0$;
c) $3x + 2y - 5 = 0$ y $4x - 6y - 5 = 0$.

2.68. ¿Para qué valor de a las rectas $2x - 4y + 9 = 0$ y $ax - 2y + 9 = 0$ son paralelas?

2.69. ¿Para qué valor de b las rectas $2x - 2y - 35 = 0$ y $x + by + 1 = 0$ son perpendiculares?

2.70. Examínese la posición recíproca de los siguientes pares de rectas. Determínense las coordenadas del punto de intersección, si las rectas se intersecan:

a) $x + y - 3 = 0$ y $3x + 3y - 9 = 0$;
b) $x = 4$ y $x + y = 0$;
c) $y = 0$ y $y - 7 = 0$;
d) $2x + y + 1 = 0$ y $2x + y + 5 = 0$.

2.71. Calcúlese el ángulo entre las rectas:

a) $y = -2x + 5$ y $y = 3x + 4$;
b) $y = \sqrt{3}x + 7$ y $y = -\sqrt{3}x - 2$;
c) $y = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{6}$ y $y = \frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$;
d) $y = -3x + 7$ y $y = x + 4$;
e) $y = \frac{2}{3}x + 4$ y $y = \frac{2}{3}x + \frac{5}{2}$.

2.72. Señálense los pares de rectas paralelas o perpendiculares entre los siguientes pares de rectas:

a) $y = -\frac{5}{3}x + 7$ y $y = -\frac{5}{3}x + 5$;
b) $y = \frac{3}{5}x + 3$ y $y = -\frac{5}{3}x + 5$;
c) $y = \frac{1}{2}x + 3$ y $y = \frac{1}{3}x + 2$.

2.73. ¿Para qué valor de a las rectas $y = ax + 3$ e $y = -3x + 2$ son paralelas?

2.74. ¿Para qué valor de a las rectas $y = ax - 1$ e $y = 5x + 3$ son perpendiculares?

2.75. Se da la recta $3x - 4y + 5 = 0$. Determínese el coeficiente angular de la recta:

a) paralela a la recta dada;
b) perpendicular a la recta dada.

2.76. Se da la recta $2x - 3y + 5 = 0$. Escríbase la ecuación de la recta que pasa por el punto M (4; —5) y es:

a) paralela a la recta dada;
b) perpendicular a la recta dada.

2.77. A través del punto de intersección de las rectas $x - y + 4 = 0$ y $4x + 2y - 19 = 0$ está trazada la recta paralela a la recta $2x - 3y + 6 = 0$. Hállese su ecuación.

2.78. A través del punto de intersección de las rectas $4x + 2y - 19 = 0$ y $5x + 6y + 6 = 0$ está trazada una recta perpendicular a la recta $x + y + 1 = 0$. Hállese su ecuación.

2.79. Se da la recta $\frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 1$. Se requiere escribir la ecuación de la recta que pasa por el punto de intersección de esta recta con el eje de las abscisas y es perpendicular a la bisectriz del primer ángulo de coordenadas.

2.80. Determínense cuáles de las siguientes ecuaciones de las rectas son normalizadas:

a) $\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y - 5 = 0$; b) $\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y + 5 = 0$;

c) $\frac{4}{5}x - \frac{3}{4}y - 7 = 0$; d) $y - 3 = 0$;

e) $x - 15 = 0$.

2.81. Redúzcase en cada uno de los casos siguientes la ecuación general de una recta a la forma normalizada y hállese la distancia del origen de coordenadas a la recta dada:

a) $3x - 4y - 25 = 0$; b) $\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y + 20 = 0$;

c) $x - 5 = 0$; d) $5x - 12y + 26 = 0$;

e) $\frac{5}{13}x + \frac{12}{13}y + 13 = 0$.

2.82. Se da la recta $\frac{x}{3} + \frac{y}{-2} = 1$. Determínese la distancia hasta esta recta desde el origen de coordenadas.

2.83. Escríbanse las ecuaciones de las rectas que son perpendiculares a la recta $2x + y = 0$, si la distancia del origen de coordenadas a estas rectas es igual a 3.

2.84. Hállese la distancia desde un punto dado hasta una recta dada:

a) $M_0\left(\frac{3}{2}; 9\right)$; $4x + 3y - 8 = 0$;

b) $M_0\left(-\frac{3}{2}; -9\right)$, $4x + 3y - 17 = 0$.

2.85. Calcúlense las distancias entre las rectas paralelas:

a) $4x - 3y + 25 = 0$, $8x - 6y + 25 = 0$;
b) $5x - 12y + 26 = 0$, $5x - 12y - 13 = 0$;
c) $3x - 4y - 20 = 0$, $6x - 8y + 25 = 0$.

2.86. Se dan los vértices del triángulo: A (2; 1), B (−2; 3) y C (−10; −13). Calcúlese la longitud de la perpendicular bajada del vértice B a la mediana trazada del vértice C.

2.87. A través del punto de intersección de las rectas $3x + 2y - 13 = 0$, $x + 3y - 9 = 0$ está trazada una recta paralelamente a la recta $\frac{x}{4} + \frac{y}{5} = 1$. Escríbase su ecuación. Hállese la distancia de esta recta a la recta $\frac{x}{4} + \frac{y}{5} = 1$.

2.88. Escríbanse las ecuaciones de las rectas que son paralelas a la recta $4x + 3y + 1 = 0$ y distan de ella en 3 unidades.

2.89. Escríbase la ecuación de la recta que es paralela a las rectas $3x + 2y = 5$ y $6x + 4y + 4 = 0$ y cuya distancia hasta estas rectas sea igual.

2.90. Fórmese la ecuación de la recta que pasa por el punto (1; 2) de manera, que la distancia hasta ésta desde los puntos (2; 3) y (4; —5) sea igual.

Capítulo III

CURVAS DE SEGUNDO ORDEN

§ 37. Circunferencia

Se denomina *circunferencia* el conjunto de puntos del plano, equidistantes de un punto dado, llamado *centro*.

Si el punto C es el centro de la circunferencia, R es su radio y M es un punto arbitrario de la circunferencia, entonces según la definición de la circunferencia se tiene

$$|CM| = R. \qquad (1)$$

La igualdad (1) es la ecuación de la circunferencia del radio R con el centro en el punto C.

Sea que en el plano está dado un sistema cartesiano rectangular de coordenadas (fig. 104) y el punto $C(a;\ b)$, que es el centro de la circunferencia del radio R. Sea que $M(x;\ y)$ es un punto arbitrario de esta circunferencia. Puesto que $|CM| = \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$, la ecuación (1) puede escribirse así:

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} = R$$

o

$$(x-a)^2+(y-b)^2 = R^2. \qquad (2)$$

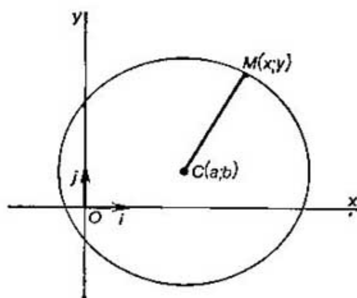


Fig. 104

La ecuación (2) se denomina *ecuación general de la circunferencia* o ecuación de la circunferencia del radio R con el centro en el punto $(a;\ b)$. Por ejemplo, la ecuación

$$(x-1)^2+(y+3)^2 = 25$$

es la ecuación de la circunferencia del radio $R = 5$ con el centro en el punto (1; —3).

Si el centro de una circunferencia coincide con el origen de coordenadas, la ecuación (2) toma la forma

$$x^2 + y^2 = R^2. \qquad (3)$$

La ecuación (3) se denomina *ecuación canónica de la circunferencia.*

Problema 1. Escríbase la ecuación de la circunferencia de radio $R = 7$ con el centro en el origen de coordenadas.

△ Sustituyendo directamente el valor del radio en la ecuación (3) obtendremos $x^2 + y^2 = 49$. ▲

Problema 2. Escríbase la ecuación de la circunferencia de radio $R = 9$ con el centro en el punto C (3; —6).

△ Sustituyendo el valor de las coordenadas del punto C y el valor del radio en la fórmula (2), obtendremos $(x - 3)^2 + (y - (-6))^2 = 81$ ó $(x - 3)^2 + (y + 6)^2 = 81$. ▲

Problema 3. Hállese el centro y el radio de la circunferencia

$$(x + 3)^2 + (y - 5)^2 = 100.$$

△ Comparando la ecuación dada con la ecuación general de la circunferencia (2), vemos que $a = -3$, $b = 5$, $R = 10$. Por consiguiente, C (—3; 5), $R = 10$. ▲

Problema 4. Demuéstrese que la ecuación $x^2 + y^2 + 4x - 2y - 4 = 0$ es una ecuación de la circunferencia. Hállese su centro y radio.

△ Transformamos el primer miembro de la ecuación dada:

$$x^2 + 4x + 4 - 4 + y^2 - 2y + 1 - 1 - 4 = 0$$

ó

$$(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 9.$$

Esta ecuación representa una ecuación de la circunferencia con el centro en el punto (—2; 1); el radio de la circunferencia es igual a 3. ▲

Problema 5. Escríbase la ecuación de la circunferencia con el centro en el punto C (—1; —1) que es tangente a la recta AB, si A (2; —1); B (—1; 3).

△ Escribamos la ecuación de la recta AB:

$$\frac{x-2}{-1-2} = \frac{y+1}{3+1} \quad \text{ó} \quad 4x + 3y - 5 = 0.$$

Puesto que la circunferencia es tangente a la recta dada, el radio trazado al punto de tangencia es perpendicular a esta recta. Para determinar el radio es necesario hallar la distancia del punto $C(-1;\ -1)$, que es el centro de la circunferencia, a la recta $4x+3y-5=0$:

$$R=\frac{|4\cdot(-1)+3\cdot(-1)-5|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{12}{5}.$$

Escribamos la ecuación de la circunferencia buscada

$$(x+1)^2+(y+1)^2=\frac{144}{25}.\quad ▲$$

Sea que en un sistema rectangular de coordenadas se da la circunferencia $x^2+y^2=R^2$. Examinemos su punto

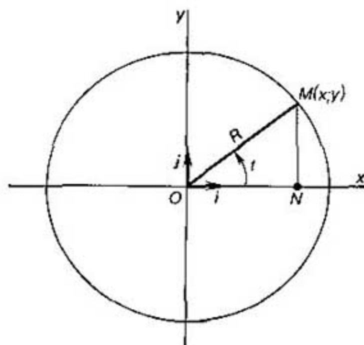


Fig. 105

arbitrario $M(x;\ y)$ (fig. 105). Sea que el radio vector $\overrightarrow{OM}$ del punto M forma con la dirección positiva del eje Ox un ángulo igual a t, entonces, la abscisa y la ordenada del punto M varían en función de t $(0\leqslant t<2\pi)$. Expresando x e y mediante t hallamos

$$x=R\cos t;\quad y=R\operatorname{sen} t;\quad 0\leqslant t<2\pi. \qquad (4)$$

Las ecuaciones (4) se denominan *ecuaciones paramétricas de la circunferencia con el centro en el origen de coordenadas.*

Problema 6. La circunferencia está dada por las ecuaciones $x = \sqrt{3}\cos t$, $y = \sqrt{3}\,\text{sen}\,t$, $0 \leqslant t < 2\pi$. Escríbase la ecuación canónica de esta circunferencia.

△ De la condición se deduce que $x^2 = 3\cos^2 t$, $y^2 = 3\,\text{sen}^2\,t$. Sumando estas igualdades, obtenemos

$$x^2 + y^2 = 3(\cos^2 t + \text{sen}^2\,t)$$

ó

$$x^2 + y^2 = 3. \quad ▲$$

§ 38. Elipse

Se denomina *elipse* el conjunto de puntos de un plano para cada uno de los cuales la suma de las distancias a dos puntos dados del mismo plano es constante y mayor que la distancia entre estos puntos.

Los puntos dados se denominan *focos* de la elipse y la distancia entre ellos, *distancia focal*. Al hombre le toca

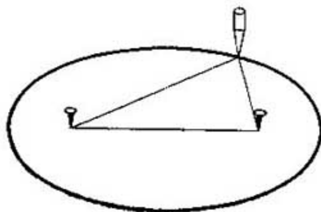


Fig. 106

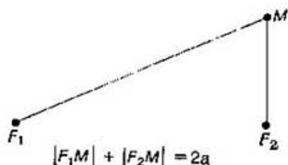


Fig. 107

tratar con la elipse en las más diversas esferas de su actividad. El jardinero traza un parterre limitado por una elipse. El pintor traza un contorno elíptico para pintar las paredes o el techo de una sala. El matemático calcula la trayectoria elíptica del movimiento del satélite de la Tierra. Por fin, la propia Tierra, como se sabe, se mueve por la elipse, en uno de cuyos focos se encuentra el Sol. Mostremos cómo se puede trazar un parterre elíptico partiendo de la definición de la elipse. Clavemos en el terreno dos estacas (fig. 106), atemos luego los cabos de una cuerda fina formando un anillo y pongamos el anillo de cuerda sobre ambas estacas. Manteniendo tirante la cuerda por medio de la tercera estaca, tracemos con su ayuda una elipse. Variando la distancia

entre las estacas y la longitud de la cuerda, se pueden obtener elipses de diferentes tamaños y formas.

Designemos los focos de la elipse por las letras F_1 y F_2. Sea que la distancia focal $|F_1F_2| = 2c$. Si M es un punto arbitrario de la elipse (fig. 107), según la definición de la elipse la suma $|F_1M| + |F_2M|$ es constante. Al designarla por $2a$, obtendremos

$$|F_1M| + |F_2M| = 2a. \qquad (1)$$

Es de señalar, que según la definición de la elipse $2a > 2c$, es decir, $a > c$. La igualdad (1) es la ecuación de la elipse.

Si el punto F_1 coincide con el punto F_2, la ecuación de la elipse toma la forma

$$2|F_1M| = 2a, \quad \text{es decir,} \quad |F_1M| = a.$$

Esta ecuación es la ecuación de la circunferencia de radio a con el centro en el punto F_1 ($F_1 = F_2$). Así pues, toda circunferencia es un caso particular de la elipse.

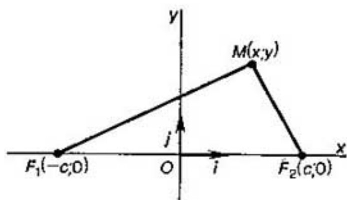


Fig. 108

Escojamos el sistema de coordenadas de manera que el eje de las abscisas pase por los focos de una elipse; el eje de ordenadas lo trazamos por el punto medio del segmento F_1F_2 perpendicularmente a él. Entonces, los focos serán los puntos $F_1(-c;\ 0)$ y $F_2(c;\ 0)$ (fig.108).

Sea que $M(x;\ y)$ es un punto cualquiera de la elipse, entonces $|F_1M| = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$ y $|F_2M| = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$.

Sustituyendo los valores hallados $|F_1M|$ y $|F_2M|$ en la ecuación (1), obtenemos

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a. \qquad (2)$$

La ecuación (2) es la ecuación de la elipse en un sistema de coordenadas elegido. Esta ecuación puede reducirse a una forma más sencilla. Para ello traslademos primera-

mente el segundo sumando del primer miembro al segundo miembro de la ecuación:

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}. \qquad (3)$$

Luego elevamos ambos miembros de la igualdad obtenida al cuadrado:

$$(x+c)^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2.$$

Después de las simplificaciones obtendremos

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}=a-\frac{c}{a}x. \qquad (4)$$

Elevando al cuadrado ambos miembros de la ecuación (4) tendremos

$$(x-c)^2+y^2=\left(a-\frac{c}{a}x\right)^2$$

ó

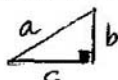
$$x^2-2cx+c^2+y^2=a^2-2cx+\frac{c^2}{a^2}x^2,$$

de donde

$$\frac{a^2-c^2}{a^2}x^2+y^2=a^2-c^2. \qquad (5)$$

Según la definición de la elipse $a>c$, por lo tanto a^2-c^2 es un número positivo. Designémoslo por b^2, es decir, consideremos que $b^2=a^2-c^2$. Entonces, la ecuación (5) tomará la forma

$$\frac{b^2}{a^2}x^2+y^2=b^2.$$



Dividiendo ambos miembros de la última igualdad por b^2, obtendremos la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \qquad (6)$$

que se denomina *ecuación canónica de la elipse*. Si $a=b$, es decir, en el caso de $c=0$, la ecuación (6) toma la forma

$$x^2+y^2=a^2,$$

es decir, es la ecuación canónica de la circunferencia.

Observación. La ecuación obtenida (6) es un corolario de la ecuación (2). Por lo tanto, las coordenadas x y y de

cada punto de la elipse, definida por la ecuación (2), satisfacen también la ecuación (6). Al deducir la ecuación (6) hemos elevado dos veces al cuadrado ambos miembros de la ecuación. Tal operación podría llevarnos a que la ecuación (6) sea satisfecha no sólo por las coordenadas x y y de los puntos de la elipse, sino también por las coordenadas de ciertos puntos que no pertenecen a la elipse (como es sabido, al elevar al cuadrado pueden aparecer soluciones extrañas). Mostremos que en el caso dado no sucedió así. Puesto que $\frac{y^2}{b^2} \geqslant 0$, de la ecuación (6) se deduce que $\frac{x^2}{a^2} \leqslant 1$, es decir, $|x| \leqslant a$. Análogamente llegamos a la conclusión de que $|y| \leqslant b$. Así pues, todos los puntos M $(x;\ y)$ cuyas coordenadas satisfacen la ecuación (6) se encuentran en el rectángulo $|x| \leqslant a$, $|y| \leqslant b$. Pero en el rectángulo $|x| \leqslant a$, $|y| \leqslant b$ no hay puntos, cuyas coordenadas satisfacen la ecuación (6) y no satisfacen la ecuación de la elipse (2), ya que, al elevar al cuadrado, en el conjunto de los puntos de este rectángulo no se altera la equivalencia, debido al carácter no negativo de los ambos miembros de las ecuaciones (3) y (4). Los primeros miembros de las ecuaciones (3) y (4) son en todo lugar no negativos. Mostremos, que siempre que $|x| \leqslant a$ y $|y| \leqslant b$ los segundos miembros de estas ecuaciones también son no negativos. En efecto,

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2} \leqslant \sqrt{(-a-c)^2+b^2} =$$
$$= \sqrt{a^2+2ac+c^2+b^2} = \sqrt{2a^2+2ac} \leqslant$$
$$\leqslant \sqrt{2a^2+2a^2} = 2a,$$
$$a - \frac{c}{a}x \geqslant a - \frac{c}{a}a = a - c > 0.$$

De este modo, las ecuaciones (2) y (6) son equivalentes.

Problema 1. Escribir la ecuación canónica de la elipse que pasa por el punto M (5; 0), si su distancia focal es igual a 6.

▲ Puesto que $|F_1F_2| = 6$, $c = 3$. Escribamos la ecuación canónica de la elipse:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Según la condición el punto M (5; 0) pertenece a la elipse, por consiguiente, $\frac{25}{a^2} = 1$, de donde $a^2 = 25$. De la

igualdad $a^2 - c^2 = b^2$ obtenemos $b^2 = 25 - 9 = 16$. De este modo, la ecuación buscada de la elipse es la siguiente

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1. \ \blacktriangle$$

Problema 2. Demuéstrese que la ecuación $36x^2 + 100y^2 - 3600 = 0$ es una ecuación de la elipse. Hállense las coordenadas de los focos y la distancia focal.

△ Al dividir por 3600 ambos miembros de la ecuación, obtendremos

$$\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1.$$

Esta ecuación es la ecuación de la elipse.

De la igualdad $a^2 - c^2 = b^2$ se deduce que $c^2 = a^2 - b^2$. Puesto que $a^2 = 100$ y $b^2 = 36$, $c^2 = 64$, de donde $c = 8$. Los focos de la elipse se encontrarán en los puntos F_1 $(-8; 0)$ y F_2 $(8; 0)$. La distancia focal $|F_1F_2| = 16$. ▲

§ 39. Investigación de la elipse por medio de su ecuación canónica

Examinemos una elipse definida en un cierto sistema cartesiano rectangular de coordenadas por medio de su ecuación canónica

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \qquad (1)$$

Señalemos las siguientes propiedades de la elipse.

1) *La elipse* (1) *interseca cada uno de los ejes de coordenadas en dos puntos.*

Para determinar las coordenadas de los puntos de intersección de la elipse (1) con el eje Ox, es necesario resolver conjuntamente sus ecuaciones:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad y = 0.$$

El punto de intersección de la elipse con el eje Ox debe tener la ordenada $y = 0$ y pertenecer, al mismo tiempo, a la elipse. Sustituyendo $y = 0$ en la ecuación de la elipse, obtendremos $x = \pm a$.

Así pues, los puntos de intersección de la elipse (1) con el eje Ox serán los puntos A $(a; 0)$ y C $(-a; 0)$. Análogamente, hallamos los puntos de intersección de la elipse

con el eje Oy: B (0; b) y D (0; $-b$) (fig. 109). Los puntos A, B, C y D se denominan *vértices de la elipse*.

El segmento AC se denomina *eje mayor* de la elipse, el segmento BD, *eje menor*. Los focos F_1 y F_2 de la elipse se encuentran en el eje mayor. Es evidente, que la longitud

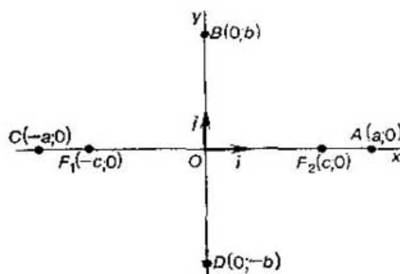


Fig. 109

del eje mayor es igual a $2a$ y del eje menor, $2b$. Los números a y b se denominan *semiejes de la elipse*.

2) *La elipse tiene dos ejes de simetría perpendiculares entre sí.*

Las variables x y y entran en la ecuación (1) sólo con la potencia al cuadrado. Por consiguiente, si las coordenadas del punto N (x; y) satisfacen la ecuación (1), las coordenadas de los puntos N_1 ($-x$; y) y N_2 (x; $-y$) también satisfarán esta ecuación. Es fácil ver que el punto N_1 es simétrico al punto N respecto al eje de ordenadas y el punto N_2 es simétrico al punto N respecto al eje de abscisas.

Así pues, la elipse tiene dos ejes de simetría que son perpendiculares entre sí. Los ejes mayor y menor de la elipse están situados en sus ejes de simetría. Es de señalar, que en el caso particular, cuando $a = b$, es decir, cuando la elipse es una circunferencia, el eje de simetría será una recta cualquiera que pase por el centro de la circunferencia.

3) *La elipse tiene un centro de simetría.*

Si las coordenadas del punto N (x; y) satisfacen la ecuación (1), las coordenadas del punto K ($-x$; $-y$) también satisfacen la misma ecuación. Es evidente, que el punto K es simétrico al punto N respecto al origen de coordenadas.

Así pues, la elipse tiene un centro de simetría. El centro de simetría de la elipse se denomina *centro de la elipse.*

4) *La elipse puede ser obtenida por medio de la compresión uniforme de una circunferencia.*

Examinemos la circunferencia de radio $R = a$ con el centro en el origen de coordenadas (fig. 110). Sea que $P\ (X;\ Y)$ es un punto arbitrario de esta circunferencia. Entonces

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{a^2} = 1. \qquad (2)$$

Comparemos el punto $P\ (X;\ Y)$ situado en la circunferencia con el punto $P_1\ (x;\ y)$ tal que

$$x = X \quad \text{y} \quad y = \frac{b}{a} Y. \ (*)$$

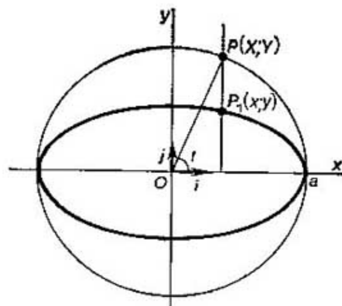


Fig. 110

El punto P_1 se obtiene por medio de un desplazamiento del punto P, con el cual la abscisa no varía y la ordenada disminuye en la razón $\frac{b}{a}$. Las coordenadas del punto P_1 satisfacen la ecuación de la elipse. En efecto,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{X^2}{a^2} + \frac{\left(\frac{b}{a} Y\right)^2}{b^2} = \frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{a^2} = 1.$$

Por consiguiente, el punto P_1 está situado en la elipse.

De este modo, la elipse (1) puede ser obtenida a partir de la circunferencia (2) por medio de la compresión uniforme hacia el eje OX, con la cual las ordenadas de los puntos disminuyen en la misma razón, igual a $\frac{b}{a}$.

De aquí resulta, que la forma de la elipse depende del valor de la razón $\frac{b}{a}$; cuanto menor sea esta razón, tanto más comprimida estará la elipse, y, viceversa, cuanto ~~mayor~~ menor sea esta razón, tanto menos comprimida y más redondeada estará la elipse. Siempre que los valores de la razón $\frac{b}{a}$ sean próximos a la unidad, la elipse se diferenciará poco

de la circunferencia. Cuando la razón $\frac{b}{a}$ toma un valor máximo, es decir, cuando $\frac{b}{a} = 1$, la elipse se transforma en circunferencia.

Como característica de la forma de la elipse es más cómodo utilizar no la razón $\frac{b}{a}$, sino la razón $\frac{c}{a}$. La relación entre la distancia semifocal c y el semieje mayor a se denomina *excentricidad* de la elipse. La excentricidad se designa con la letra ε.

De esta forma,

$$\varepsilon = \frac{c}{a}.$$

Puesto que $0 \leqslant c < a$, la excentricidad de la elipse satisface las desigualdades

$$0 \leqslant \varepsilon < 1.$$

Expresemos la excentricidad de la elipse por medio de la razón $\frac{b}{a}$ de los semiejes de la elipse:

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a},$$

de donde

$$\varepsilon = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2}. \tag{3}$$

De la fórmula obtenida se deduce, que a los valores menores de la razón $\frac{b}{a}$ les corresponden los valores mayores de la excentricidad. Por lo tanto, cuanto mayor es la excentricidad, tanto más comprimida está la elipse. Para valores pequeños de excentricidad la elipse se diferencia poco de la circunferencia. Si $\varepsilon = 0$, la elipse se transforma en una circunferencia. De este modo, la excentricidad de la circunferencia es igual a cero.

Problema 1. Construir las elipses

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1 \quad \text{y} \quad \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

Calcular la excentricidad para cada elipse.

△ Por las ecuaciones dadas hallamos los semiejes de las elipses: $a_1 = 5$, $b_1 = 4$ y $a_2 = 5$, $b_2 = 3$. Señalamos en el dibujo (fig. 111) los vértices de la primera elipse: los puntos A_1 (5; 0), B_1 (0; 4), C_1 (—5; 0), D_1 (0; —4). Dos vértices de la segunda elipse se encuentran en los puntos A_1 y C_1, los otros dos, en los puntos B_2 (0; 3) y D_2 (0; —3).

Construyamos la circunferencia $x^2 + y^2 = 25$. Los puntos de la primera elipse los obtendremos desplazando hacia el eje OX los puntos de esta circunferencia, con lo cual las ordenadas disminuyen en la razón $\frac{b_1}{a_1} = \frac{4}{5}$. Los puntos de la segunda elipse los obtendremos desplazando los puntos de la circunferencia, con lo cual las ordenadas disminuyen en la razón $\frac{b_2}{a_2} = \frac{3}{5}$. Señalemos, que es suficiente obtener los puntos de la elipse en uno de los cuadrantes del plano de coordenadas y, luego, utilizar la simetría de la elipse respecto a los ejes de coordenadas. En la figura 111 la primera elipse está expresada por medio de la curva $A_1B_1C_1D_1$, la segunda, por medio de la curva $A_1B_2C_1D_2$.

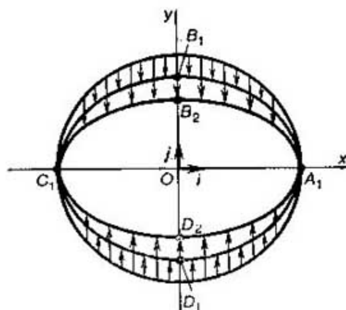


Fig. 111

Hallamos las excentricidades de las elipses por la fórmula (3):

$$\varepsilon_1 = \sqrt{1 - \left(\frac{b_1}{a_1}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \frac{3}{5},$$

$$\varepsilon_2 = \sqrt{1 - \left(\frac{b_2}{a_2}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \frac{4}{5}.$$

La excentricidad de la segunda elipse es mayor que la de la primera; esto quiere decir que la segunda elipse está más comprimida a su eje mayor.

Observación. La elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ puede ser construida, aplicando los mismos métodos que se estudian en el álgebra y los inicios del análisis. Para esto, es necesario

resolver la ecuación de la elipse respecto a la variable y y construir los gráficos de las funciones $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ y $y = -\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$. Naturalmente, es suficiente construir un gráfico de una de estas funciones y, luego, utilizar la simetría de la elipse respecto al eje Ox.

5) *La elipse* (1) *puede ser definida por las ecuaciones paramétricas*

$$x = a\cos t, \quad y = b \operatorname{sen} t, \quad 0 \leqslant t < 2\pi. \qquad (4)$$

En el punto anterior fue demostrado que si el punto $P\,(X;\ Y)$ está situado en la circunferencia de radio $R = a$ con el centro en el origen de coordenadas, entonces el punto $P_1\,(x;\ y)$, donde $x = X$, $y = \frac{b}{a}Y$, está situado en la elipse (1) (véase la fig. 110). Las coordenadas de los puntos de la circunferencia de radio $R = a$ con el centro en el origen de coordenadas se expresan por medio de la magnitud t del ángulo entre el radio vector del punto P y el eje Ox de la manera siguiente:

$$X = a\cos t, \quad Y = a \operatorname{sen} t, \quad 0 \leqslant t < 2\pi.$$

Por consiguiente, las coordenadas x y y de los puntos de la elipse se expresan por medio del mismo parámetro t por las ecuaciones (4). Realmente,

$$x = X = a\cos t,$$

$$y = \frac{b}{a}Y = \frac{b}{a}a \operatorname{sen} t = b \operatorname{sen} t, \quad 0 \leqslant t < 2\pi.$$

Si $a = b$ obtenemos las ecuaciones paramétricas de la circunferencia.

Problema 2. Se da la elipse $9x^2 + 16y^2 = 144$. Escríbanse sus ecuaciones paramétricas.

△ Reduzcamos la ecuación de la elipse a la forma canónica:

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1,$$

de donde $a^2 = 16$, $b^2 = 9$, y, por consiguiente, $a = 4$, $b = 3$. Según las fórmulas (4) obtenemos las ecuaciones paramétricas

$$x = 4\cos t, \quad y = 3 \operatorname{sen} t. \ \blacktriangle$$

Problema 3. Se dan las ecuaciones paramétricas de la elipse

$$x = 5 \cos t, \quad y = 3 \operatorname{sen} t.$$

Escríbase su ecuación canónica.

△ En el caso dado obtenemos $a = 5$, $b = 3$. Por consiguiente, la ecuación canónica de la elipse será la ecuación

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1. \ \blacktriangle$$

§ 40. Hipérbola

Se denomina *hipérbola* el conjunto de los puntos de un plano para cada uno de los cuales el módulo de la diferencia de las distancias a dos puntos fijos del plano es una cantidad constante y menor que la distancia entre estos puntos.

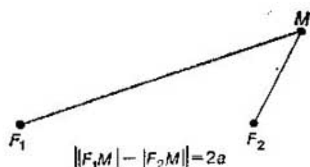


Fig. 112

Los puntos fijos se denominan *focos* de la hipérbola y la distancia entre ellos, *distancia focal.*

Designemos los focos de la hipérbola con las letras F_1 y F_2. Sea que la distancia focal $|F_1F_2| = 2c$.

Si M es un punto arbitrario de la hipérbola (fig. 112), entonces según la definición de la hipérbola el módulo de la diferencia $||F_1M| - |F_2M||$ es constante. Designándolo con $2a$, obtendremos

$$||F_1M| - |F_2M|| = 2a \qquad (1)$$

Señalemos, que según la definición de la hipérbola $2a < 2c$, es decir, $a < c$.

La igualdad (1) es la ecuación de la hipérbola.

Escojamos un sistema de coordenadas de manera, que el eje de las abscisas pase por los focos de la hipérbola; el eje de ordenadas lo trazamos por el punto medio del segmento F_1F_2 perpendicularmente a éste (fig. 113). Entonces serán focos de la hipérbola los puntos $F_1(-c; 0)$ y $F_2(c; 0)$.

Sea que $M\ (x;\ y)$ es un punto cualquiera de la hipérbola, entonces $|F_1M| = \sqrt{(x+c)^2+y^2}$ y $|F_2M| = \sqrt{(x-c)^2+y^2}$.

Sustituyendo los valores $|F_1M|$ y $|F_2M|$ en la ecuación (1) obtenemos

$$\left|\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right| = 2a. \qquad (2)$$

La ecuación obtenida representa la ecuación de la hipérbola en el sistema de coordenadas escogido. Esta ecuación puede ser reducida a una forma más sencilla.

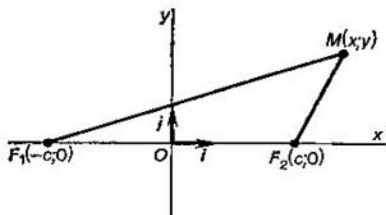


Fig. 113

Sea $x \geqslant 0$, entonces la ecuación (2) puede escribirse sin el signo del módulo de la manera siguiente:

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2} = 2a \qquad (*)$$

ó

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a+\sqrt{(x-c)^2+y^2}. \qquad (3)$$

Elevemos al cuadrado ambos miembros de la igualdad obtenida:

$$(x+c)^2+y^2 = 4a^2+4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2.$$

Después de realizar las simplificaciones y transformaciones correspondientes:

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2} = \frac{c}{a}x-a. \qquad (4)$$

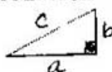
$$(x-c)^2+y^2 = \left(\frac{c}{a}x-a\right)^2,$$

$$x^2-2cx+c^2+y^2 = \frac{c^2}{a^2}x^2-2cx+a^2,$$

obtenemos la ecuación

$$\frac{c^2-a^2}{a^2}x^2-y^2=c^2-a^2. \tag{5}$$

Según la definición de la hipérbola $a<c$, por lo tanto c^2-a^2 es un número positivo. Designémoslo con b^2, es decir, pongamos $b^2=c^2-a^2$. Entonces la ecuación (5) tomará la forma



$$\frac{b^2}{a^2}x^2-y^2=b^2.$$

Dividiendo por b^2 término a término, obtendremos la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1. \tag{6}$$

Si $x<0$, la ecuación (2) se reescribe sin el signo del módulo del modo siguiente:

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}-\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a, \quad (**)$$

y exactamente lo mismo que en el caso $x\geqslant 0$, se transforma a la forma (6).

La ecuación (6) se denomina *ecuación canónica de la hipérbola.*

Observación. La elevación al cuadrado de ambos miembros de la ecuación (3) y (4) no alteró la equivalencia de las ecuaciones. Es evidente, que para todos los valores x y y ambos miembros de la ecuación (3) son no negativos. El primer miembro de la ecuación (4) también es siempre no negativo. Si $x\geqslant a$, el segundo miembro de la ecuación (4) es positivo, ya que

$$\frac{c}{a}x-a>\frac{c}{a}a-a=c-a>0.$$

Así pues, los puntos extraños podrían aparecer solamente a condición de que $0\leqslant x<a$, pero de la ecuación (6) se deduce que $\frac{x^2}{a^2}\geqslant 1$, es decir, $|x|\geqslant a$.

Problema 1. Escríbase la ecuación canónica de la hipérbola que pasa por el punto $M\left(-5; \frac{9}{4}\right)$, si la distancia focal de la hipérbola es igual a 10.

Δ Puesto que $|F_1F_2| = 10$, $c = 5$. Escribamos la ecuación canónica de la hipérbola

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Según la condición el punto $M\left(-5; \frac{9}{4}\right)$ pertenece a la hipérbola, por consiguiente,

$$\frac{25}{a^2} - \frac{81}{16b^2} = 1.$$

La segunda ecuación para determinar a^2 y b^2 ofrece la relación

$$b^2 = c^2 - a^2 = 25 - a^2.$$

Resolviendo el sistema

$$\begin{cases} \dfrac{25}{a^2} - \dfrac{81}{16b^2} = 1, \\ b^2 = 25 - a^2. \end{cases}$$

hallaremos $a^2 = 16$, $b^2 = 9$. La ecuación buscada será la ecuación $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$. ▲

Problema 2. Demuéstrese, que la ecuación $20x^2 - 29y^2 = 580$ es una ecuación de la hipérbola. Hállense las coordenadas de los focos.

Δ Dividiendo por 580 ambos miembros de la ecuación, obtendremos

$$\frac{x^2}{29} - \frac{y^2}{20} = 1.$$

Esta es una ecuación de la hipérbola para la cual $a^2 = 29$, $b^2 = 20$. De la relación $c^2 = a^2 + b^2$ hallamos $c^2 = 29 + 20 = 49$, $c = 7$. Por consiguiente, los focos de la hipérbola están situados en los puntos $F_1(-7; 0)$ y $F_2(7; 0)$. ▲

§ 41. Investigación de la hipérbola por medio de su ecuación canónica

Examinemos una hipérbola definida en un cierto sistema cartesiano rectangular de coordenadas por medio de su ecuación canónica

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \qquad (1)$$

Señalemos las siguientes propiedades de la hipérbola:

1) *La hipérbola* (1) *no tiene puntos comunes con el eje* Oy, *y corta el eje* Ox *en dos puntos.*

Para determinar las coordenadas de los puntos de intersección de la hipérbola (1) con el eje Oy es necesario resolver conjuntamente sus ecuaciones

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, \quad x=0.$$

Sustituyendo $x = 0$ en la ecuación de la hipérbola, obtendremos $y^2 = -b^2$, lo que quiere decir que el sistema no tiene soluciones. Por consiguiente, la hipérbola no corta el eje de ordenadas.

Para determinar las coordenadas de los puntos de intersección de la hipérbola (1) con el eje Ox es necesario resolver conjuntamente sus ecuaciones

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, \quad y=0.$$

El punto de intersección de la hipérbola con el eje Ox debe tener la ordenada $y = 0$ y pertenecer, al mismo tiempo, a la hipérbola. Sustituyendo $y = 0$ en la ecuación de la hipérbola, obtendremos

$$x = \pm a.$$

Así pues, los puntos de intersección de la hipérbola (1) con el eje Ox serán los puntos A $(a; 0)$ y B $(-a; 0)$; éstos se denominan *vértices* de la hipérbola.

El segmento AB se denomina *eje real* de la hipérbola. La longitud del segmento AB es, evidentemente, igual a $2a$. El número a se denomina *semieje real* de la hipérbola, el número b, *semieje imaginario*.

2) *La hipérbola tiene dos ejes de simetría perpendiculares entre sí.*

En la ecuación (1) las variables x y y figuran solamente a la segunda potencia. Por consiguiente, si las coordenadas del punto N $(x; y)$ satisfacen la ecuación (1), las coordenadas de los puntos N_1 $(-x; y)$ y N_2 $(x; -y)$ también satisfarán la misma ecuación.

Es fácil ver, que el punto N_1 es simétrico al punto N respecto al eje de ordenadas, y el punto N_2 es simétrico al punto N respecto al eje de abscisas.

De este modo, la hipérbola tiene dos ejes de simetría que son perpendiculares entre sí.

3) *La hipérbola tiene un centro de simetría.*

Si las coordenadas del punto N $(x; y)$ satisfacen la ecuación (1), la misma ecuación también la satisfacen las coordenadas del punto K $(-x; -y)$. Es evidente, que el punto K es simétrico al punto N respecto al origen de coordenadas. Así pues, la hipérbola tiene un centro de simetría. El centro de simetría de la hipérbola se denomina *centro de la hipérbola.*

4) *La hipérbola* (1) *se interseca con la recta* $y = kx$ *en dos puntos si* $|k| < \frac{b}{a}$. *Si* $|k| \geqslant \frac{b}{a}$, *la hipérbola y la recta no tienen puntos comunes.*

Para determinar las coordenadas de los puntos de intersección de la hipérbola (1) y la recta $y = kx$, es necesario resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ y = kx. \end{cases} \tag{2}$$

Sustituyendo y, obtenemos

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{k^2x^2}{b^2} = 1,$$

de donde

$$(b^2 - k^2a^2)\, x^2 = a^2b^2.$$

Si $b^2 - k^2a^2 \leqslant 0$, o sea, si $|k| \geqslant \frac{b}{a}$, la ecuación obtenida y, por lo tanto, el sistema (2) no tiene soluciones. Por consiguiente, las rectas que pasan por el origen de coordenadas con un coeficiente angular, cuyo módulo es mayor o igual a $\frac{b}{a}$, no intersecan la hipérbola (1). Las rectas con las ecuaciones $y = \frac{b}{a}x$ y $y = -\frac{b}{a}x$ se denominan *asíntotas de la hipérbola* (1).

Si $b^2 - k^2a^2 > 0$, es decir, si $|k| < \frac{b}{a}$, el sistema (2) tiene dos soluciones:

$$x = \pm \frac{ab}{\sqrt{b^2 - k^2a^2}}, \quad y = \pm \frac{kab}{\sqrt{b^2 - k^2a^2}}. \tag{3}$$

Por consiguiente, cada recta que atraviesa el origen de coordenadas con un coeficiente angular, cuyo módulo es menos

de $\frac{b}{a}$, interseca la hipérbola (1) en dos puntos (fig. 114). Si $k = 0$, de la fórmula (3) obtenemos $x = \pm a$, $y = 0$, es decir, la recta $y = 0$ corta la hipérbola en sus vértices.

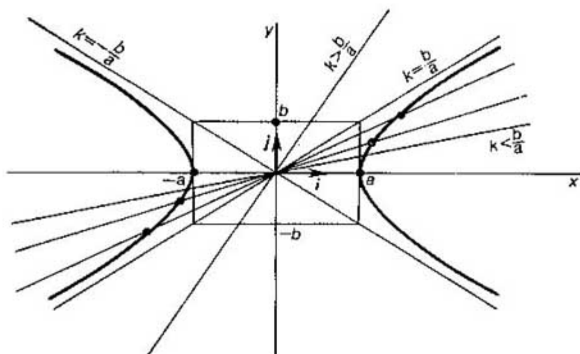


Fig. 114

Puesto que la hipérbola es simétrica respecto a los ejes de coordenadas, es suficiente estudiar su forma en el primer cuadrante del plano de coordenadas. De las fórmulas

$$x = \frac{ab}{\sqrt{b^2 - k^2a^2}}, \quad y = \frac{kab}{\sqrt{b^2 - k^2a^2}}, \quad k > 0$$

resulta, que al crecer k de cero hasta $\frac{b}{a}$ (en este caso, la recta $y = kx$ gira en sentido antihorario), tanto las abscisas como las ordenadas de los puntos de intersección de la recta con la hipérbola crecen. La recta $y = kx$ corta la hipérbola en los puntos cada vez más alejados del origen de coordenadas. Así pues, la hipérbola (1) tiene la forma ilustrada en la figura 114. Consta de dos partes no ligadas entre sí que se denominan sus *ramas*.

Observación 1. La hipérbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ puede ser construida también, utilizando los métodos que se estudian en el álgebra y en los inicios del análisis. Con este propósito,

hace falta resolver la ecuación de la hipérbola respecto a la variable y y construir los gráficos de las funciones

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}, \text{ y } y = -\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}.$$

Es suficiente construir el gráfico de una de estas funciones y luego utilizar la simetría de la hipérbola respecto al eje Ox.

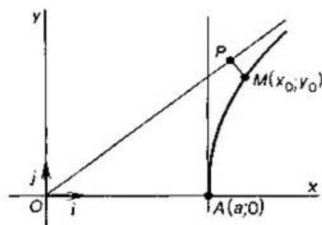


Fig. 115

Observación 2*. Se puede precisar la posición de los puntos de la hipérbola (1) respecto a sus asíntotas $y = \pm\frac{b}{a}x$.

Hallemos la distancia de un punto de la hipérbola, situado en el primer cuadrante del plano de coordenadas, a la recta $y = \frac{b}{a}x$. Escribamos su ecuación en la forma $bx - ay = 0$. El problema de determinación de la distancia de un punto a una recta se estudió en el 36.

Sea que $M(x_0; y_0)$ es un punto de la hipérbola ($x_0 > 0$, $y_0 > 0$). Es evidente, que el factor normalizante de la recta $bx - ay = 0$ es igual a

$$\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{1}{c},$$

y la ecuación normalizada tiene la forma

$$\frac{bx-ay}{c} = 0.$$

Por consiguiente, para la distancia buscada MP (fig. 115) obtenemos la expresión

$$|MP| = \frac{|bx_0 - ay_0|}{c} = \frac{|b^2x_0^2 - a^2y_0^2|}{c(bx_0+ay_0)}.$$

Como $M(x_0; y_0)$ es un punto de la hipérbola (1), $b^2x_0^2 - a^2y_0^2 = a^2b^2$. Por lo tanto

$$|MP| = \frac{a^2b^2}{c(bx_0+ay_0)}.$$

De la fórmula obtenida se deduce, que si el punto $M(x_0; y_0)$ se mueve por la hipérbola, de manera que su abscisa x_0 crece ilimitadamente, entonces su distancia hasta la recta $y = \frac{b}{a}x$ decrece ilimitadamente. Debido a la simetría, se puede hacer una deducción análoga también para los otros cuadrantes del plano.

Tal como ya vimos (fig. 114), la rama derecha de la hipérbola está situada por encima de la asíntota $y = -\frac{b}{a}x$ y por debajo de la asíntota $y = \frac{b}{a}x$. Por lo tanto, la razón $\frac{b}{a}$ de los semiejes de la hipérbola determina su forma. Cuanto menor es esta razón, tanto más comprimida está la hipérbola hacia el eje Ox. Como en el caso de la elipse, para caracterizar la forma de la hipérbola es más cómodo utilizar no la razón $\frac{b}{a}$, sino la razón $\frac{c}{a}$.

La razón de la distancia semifocal c respecto al semieje real a se denomina *excentricidad* de la hipérbola. La excentricidad se designa con la letra ε. De este modo,

$$\varepsilon = \frac{c}{a}$$

Puesto que para la hipérbola $c > a$, entonces la excentricidad de la hipérbola satisface la desigualdad $\varepsilon > 1$.

Expresemos la excentricidad de la hipérbola por medio de la razón $\frac{b}{a}$ de sus semiejes: $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}$ es decir,

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2}. \tag{4}$$

La fórmula (4) muestra, que a menores valores de la razón $\frac{b}{a}$ les corresponden menores valores de la excentricidad. Por consiguiente, cuanto menor es la excentricidad de la hipérbola, tanto más fuerte está comprimida ella al eje de las abscisas.

Observación. La hipérbola se denomina *equilátera* (*isósceles*), si las longitudes de sus semiejes son iguales entre sí. Puesto que para la hipérbola equilátera $a = b$, su ecuación tiene la forma

$$x^2 - y^2 = a^2. \tag{5}$$

Son asíntotas de la hipérbola equilátera las rectas $y = x$ y $y = -x$. Así pues, las asíntotas de la hipérbola equilátera son perpendiculares entre sí.

Calculemos la excentricidad de la hipérbola equilátera. Según la fórmula (4) hallamos

$$\varepsilon=\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}=\sqrt{2}.$$

La hipérbola equilátera se estudia en la escuela. Su ecuación no tiene la forma (5), ya que la hipérbola se analiza en otro sistema de coordenadas. Sobre esto se tratará en el § 43.

Problema 1. Hállense las asíntotas de las hipérbolas

$$\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{16}=1 \quad \text{y} \quad \frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{4}=1.$$

Constrúyanse las hipérbolas. Hállese la excentricidad para cada hipérbola.

△ Para la primera hipérbola se tiene $a_1 = 5$, $b_1 = 4$. Las ecuaciones de las asíntotas son $y = \frac{4}{5}x$ y $y = -\frac{4}{5}x$. Para la segunda hipérbola $a_2 = 5$, $b_2 = 2$. Las ecuaciones de las asíntotas son $y = \frac{2}{5}x$ y $y = -\frac{2}{5}x$. Antes de trazar la hipérbola, se deben construir sus asíntotas y marcar los vértices de la hipérbola. En la figura 116 están reproducidas ambas hipérbolas.

Hallemos las excentricidades de las hipérbolas según la fórmula (4):

$$\varepsilon_1=\sqrt{1+\left(\frac{b_1}{a_1}\right)^2}=\sqrt{1+\left(\frac{4}{5}\right)^2}=\frac{\sqrt{41}}{5},$$

$$\varepsilon_2=\sqrt{1+\left(\frac{b_2}{a_2}\right)^2}=\sqrt{1+\left(\frac{2}{5}\right)^2}=\frac{\sqrt{29}}{5}.$$

La excentricidad de la segunda hipérbola es menor, por consiguiente se aproxima más al eje Ox que la primera.▲

Problema 2. Se dan los focos de la hipérbola $F_1(-10; 0)$ y $F_2(10; 0)$ y su asíntota $4x + 3y = 0$. Escribir la ecuación de la hipérbola.

△ Escribiendo la ecuación de la asíntota en la forma $y = -\frac{4}{3}x$, hallamos la razón de los semiejes de la hipérbola $\frac{b}{a} = \frac{4}{3}$. De la condición del problema se deduce que $c = 10$

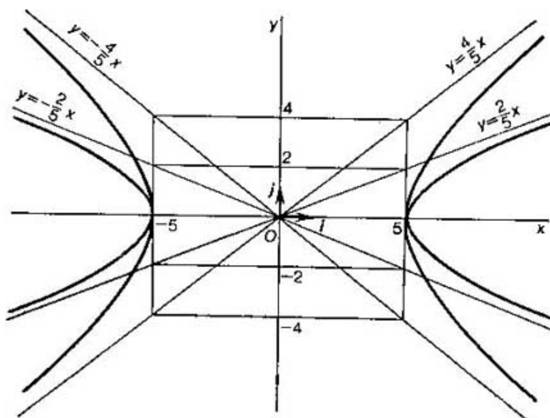


Fig. 116

Por lo tanto, $a^2 + b^2 = 100$. El problema se redujo a la resolución del sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \frac{b}{a} = \frac{4}{3}, \\ a^2 + b^2 = 100. \end{cases}$$

Sustituyendo $b = \frac{4}{3}a$ en la segunda ecuación del sistema, obtenemos

$$a^2 + \frac{16a^2}{9} = 100,$$

de aquí que $a^2 = 36$. Ahora hallemos $b^2 = (\frac{4}{3}a)^2 = \frac{16}{9} \cdot 36 = 64$. Por consiguiente, la hipérbola tiene la ecuación $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{64} = 1$. ▲

Problema 3. Escríbase la ecuación de la hipérbola, cuyos vértices se encuentran en los focos de la elipse

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1,$$

y los focos, en los vértices de la misma elipse. Hágase el dibujo.

△ Designemos con a_h, b_h los semiejes de la hipérbola y con c_h, su distancia semifocal. Sea que a_e, b_e son los semiejes de la elipse, c_e, su distancia semifocal. Para formar

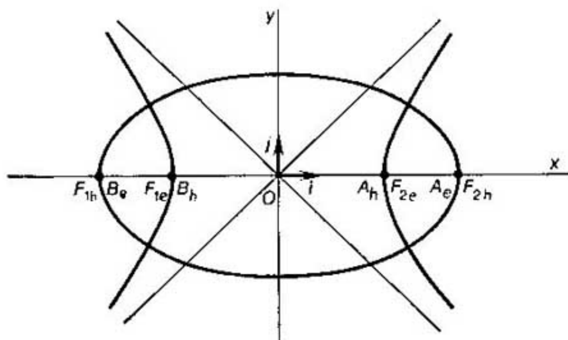


Fig. 117

la ecuación de la hipérbola, es necesario hallar a_h^2 y b_h^2. De la ecuación de la elipse tenemos $a_e^2 = 25$, $b_e^2 = 16$. De la relación $c_e^2 = a_e^2 - b_e^2$ hallamos $c_e^2 = 25 - 16 = 9$. Según la condición del problema $a_h = c_e$ y $c_h = a_e$, por consiguiente, $a_h^2 = c_e^2$ y $c_h^2 = a_e^2$. Por lo tanto, $a_h^2 = 9$ y $c_h^2 = 25$. Puesto que para la hipérbola $c_h^2 = a_h^2 + b_h^2$, entonces $b_h^2 = c_h^2 - a_h^2 = 25 - 9 = 16$. Por consiguiente la ecuación buscada de la hipérbola es como sigue:

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1.$$

El dibujo se ofrece en la figura 117. ▲

§ 42. Parábola

Se denomina *parábola* el conjunto de los puntos de un plano, para cada uno de los cuales la distancia a un punto fijo es igual a la distancia a una recta fija, que no pasa por el punto fijo.

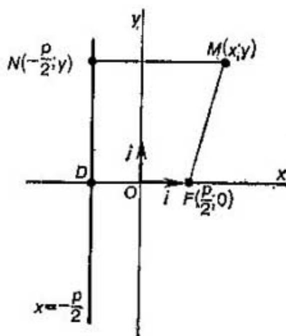


Fig. 118

El punto fijo se denomina *foco* de la parábola, la recta fija, *directriz*. La distancia del foco a la directriz se denomina *parámetro focal* de la parábola y se designa con p.

Escojamos un sistema de coordenadas de la manera siguiente. Tracemos por el foco F el eje Ox perpendicularmente a la directriz. Designemos con D (fig. 118) el punto de intersección del eje de abscisas con la directriz, por origen de coordenadas O tomemos el punto medio del segmento DF y por dirección positiva del eje Ox, la dirección del rayo OF.

En el sistema de coordenadas elegido el foco F tiene las coordenadas $\left(\frac{p}{2}; 0\right)$, y la directriz tiene la ecuación

$$x+\frac{p}{2}=0.$$

Sea que M $(x; y)$ es un punto cualquiera del conjunto buscado. Bajemos del punto M a la directriz una perpendicular y sea que N es la base de esta perpendicular. Entonces, $|MN|$ es la distancia del punto M a la directriz y, por consiguiente,

$$|MF| = |MN|.$$

Puesto que

$$|MF| = \sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2},$$

$$|MN| = \left|x+\frac{p}{2}\right|,$$

entonces

$$\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2} = \left|x+\frac{p}{2}\right|. \qquad (1)$$

La ecuación obtenida es una ecuación de la parábola en el sistema de coordenadas elegido. Esta ecuación puede ser simplificada.

Como ambos miembros de la ecuación (1) son no negativos, la ecuación

$$\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2$$

es equivalente a la ecuación inicial (1). Luego de realizar transformaciones evidentes posteriores

$$x^2-px+\frac{p^2}{4}+y^2=x^2+px+\frac{p^2}{4}$$

obtendremos la ecuación

$$y^2=2px. \qquad (2)$$

Esta se denomina *ecuación canónica de la parábola.*

Señalemos las siguientes propiedades de la parábola:

1) *La parábola tiene un eje de simetría.*

La variable y entra en la ecuación (2) solamente a la segunda potencia. Por lo tanto, si las coordenadas del punto $N_1(x;\ y)$ satisfacen la ecuación de la parábola, las coordenadas del punto $N_2(x;\ -y)$ también la satisfarán. El punto N_1 es simétrico al punto N_2 respecto al eje Ox. Por consiguiente, el eje Ox es el eje de simetría de la parábola (2). El eje de simetría de la parábola se denomina *eje de la parábola.* El punto de intersección de la parábola con el eje se denomina *vértice de la parábola.* El vértice de la parábola (2) se encuentra en el origen de coordenadas.

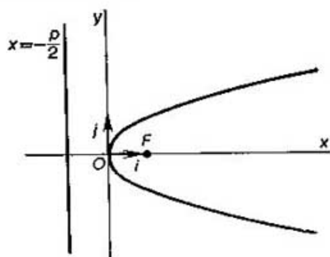


Fig. 119

2) *La parábola* (2) *está situada en el semiplano* $x \geqslant 0$.

Realmente, puesto que el parámetro focal p es positivo, a la ecuación (2) la pueden satisfacer sólo los puntos con abscisas no negativas, es decir, los puntos del semiplano $x \geqslant 0$.

3) *La parábola* (2) *es una agrupación de los gráficos de las funciones* $y=+\sqrt{2px}$ y $y=-\sqrt{2px}$ (fig. 119).

Para convencerse de esto es suficiente resolver la ecuación (2) respecto a la variable y.

Observación. La forma de la parábola es bien conocida del curso de secundaria básica, en el cual la parábola se estudia como un gráfico de la función

$$y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma. \qquad (3)$$

La diferencia entre las ecuaciones (2) y (3) de la parábola se debe a que en los distintos sistemas de coordenadas una misma curva se define por medio de distintas ecuaciones. En el párrafo que sigue esta cuestión se esclarece detalladamente.

Problema 1. Se da la parábola $y^2 = 3x$. Hállense los puntos de la parábola, cuya distancia hasta el foco es igual a 1.

△ Puesto que $2p = 3$, $\frac{p}{2} = \frac{3}{4}$ y el foco de la parábola se encuentra en el punto $F\left(\frac{3}{4};\ 0\right)$.

Sea que $M(x;\ y)$ es el punto buscado. Entonces, de acuerdo con la condición

$$\sqrt{\left(x-\frac{3}{4}\right)^2+(y-0)^2}=1.$$

Por consiguiente, para hallar las coordenadas del punto M, hace falta resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases}\left(x-\frac{3}{4}\right)^2+y^2=1,\\ y^2=3x.\end{cases}$$

Resolviendo este sistema, obtenemos

$$\left(x+\frac{3}{4}\right)^2=1, \quad x+\frac{3}{4}=1, \quad x=\frac{1}{4},$$

$$y^2=3\cdot\frac{1}{4}=\frac{3}{4}, \quad y=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Así pues, existen dos puntos, cuya distancia al foco es igual a 1: $\left(\frac{1}{4};\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ y $\left(\frac{1}{4}\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. ▲

Problema 2. El rayo de luz $y = -2$ cae sobre un espejo, cuya sección axial es la parábola $y^2 = 24x$ (fig. 120). Hállese la ecuación de la recta a la cual pertenece el rayo reflejado.

△ Si el rayo incidente es paralelo al eje óptico principal del espejo parabólico, entonces el rayo reflejado pasa por su foco. En el caso dado el eje del espejo parabólico coincide con el eje Ox. La recta $y = -2$ es paralela al eje de abscisas y, por lo tanto, el rayo reflejado pasará por el foco de la parábola $y^2 = 24x$. Puesto que $2p = 24$, es decir, $\frac{p}{2} = 6$, el foco de la parábola es el punto $F(6; 0)$.

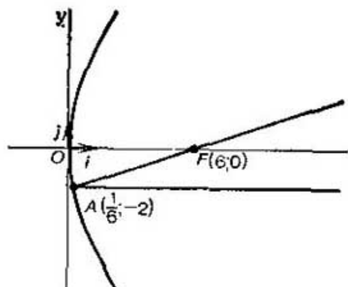


Fig. 120

Para hallar el punto de incidencia del rayo de luz, es necesario resolver el sistema de las ecuaciones

$$\begin{cases} y^2 = 24x, \\ y = -2. \end{cases}$$

Resolviendo este sistema, hallaremos el punto de incidencia del rayo $A\left(\frac{1}{6}; -2\right)$. El rayo reflejado pertenece a la recta que pasa por los puntos $\left(\frac{1}{6}; -2\right)$ y $(6; 0)$. Escribamos la ecuación de esta recta:

$$\frac{y-0}{-2-0} = \frac{x-6}{\frac{1}{6}-6}.$$

De ella obtenemos $12x - 35y - 72 = 0$. ▲

La solución de este problema ilustra una propiedad óptica importante inherente al espejo parabólico: si una fuente de luz se sitúa en su foco, entonces todos sus rayos forman, al reflejarse de la superficie del espejo, un haz de rayos paralelos al eje de la parábola. Esta propiedad se utiliza para la fabricación de faros de automóvil, proyectores, antenas de radares, etc.

§ 43. Ecuación de la elipse, de la hipérbola y de la parábola en otros sistemas de coordenadas (no canónicos)

Apliquemos las fórmulas deducidas en el 13 de transformación de un sistema cartesiano rectangular de coordenadas en otro con vistas a estudiar las ecuaciones no canónicas de la hipérbola, parábola y elipse.

1) Examinemos la ecuación

$$xy = a, \ a > 0. \qquad (1)$$

Del curso escolar se sabe que la ecuación (1) se denomina ecuación de la hipérbola y tiene el gráfico representado en la figura 121.

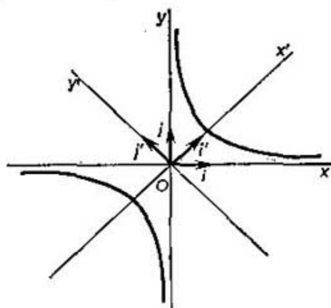


Fig. 121

Veamos cuál será la ecuación de esta hipérbola en otro sistema de coordenadas, o sea, en el sistema que se obtiene del inicial girando los vectores básicos en un ángulo de $\alpha = 45°$.

En el caso dado las coordenadas viejas x y y se expresan por medio de las nuevas x' y y' de la manera siguiente:

$$\begin{cases} x = x' \cos 45° - y' \operatorname{sen} 45°, \\ y = x' \operatorname{sen} 45° + y' \cos 45°, \end{cases}$$

es decir,

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y'), \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y'). \end{cases}$$

Sustituyendo en la ecuación (1) las variables viejas por las nuevas, obtenemos

$$\frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y') \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y') = a$$

ó

$$x'^2 - y'^2 = 2a. \qquad (2)$$

Hemos obtenido la ecuación canónica de la hipérbola equilátera. Por consiguiente, la ecuación (1) define la hipérbola equilátera. Los ejes viejos de coordenadas son las asíntotas de la hipérbola, por lo tanto, la ecuación (1) se denomina ecuación de la hipérbola relativa a las asíntotas (ver fig. 121). Comparando las ecuaciones (1) y (2), vemos que el eje real de la hipérbola, definida por la ecuación (1), es igual a $\sqrt{2a}$.

El nuevo sistema de coordenadas O, i', j' se denomina *canónico*, ya que en él la ecuación de la hipérbola tiene una forma canónica.

La ecuación $xy = a$, $a < 0$ se reduce a la forma canónica análogamente. Para obtener los nuevos vectores básicos es necesario en este caso girar los viejos vectores básicos en un ángulo de $\alpha = -45°$.

Problema 1. Se da la ecuación canónica de la hipérbola equilátera $x^2 - y^2 = 18$. Escríbase su ecuación relativa a las asíntotas.

△ Giremos en un ángulo de $\alpha = -45°$. Entonces, las coordenadas viejas se expresan por medio de las nuevas según las fórmulas

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y'), \\ y = -\frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y'). \end{cases}$$

Sustituyendo en la ecuación dada los valores x y y, obtenemos

$$\frac{1}{2}(x' + y')^2 - \frac{1}{2}(x' - y')^2 = 18$$

o después de las simplificaciones $x'y' = 9$. ▲

2) Examinemos la ecuación

$$y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma, \quad \alpha \neq 0. \tag{3}$$

Les es bien conocida esta ecuación y su gráfico: una parábola con un eje paralelo al eje de ordenadas. Escribiendo la ecuación (3) en la forma

$$y = \alpha\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 + \gamma - \frac{\beta^2}{4\alpha}, \tag{4}$$

hallamos las coordenadas del vértice de la parábola

$$x_0 = -\frac{\beta}{2\alpha}, \quad y_0 = \gamma - \frac{\beta^2}{4\alpha}.$$

Pasemos a un nuevo sistema de coordenadas, cuyas direcciones de los ejes coinciden con las direcciones de los ejes del sistema viejo, y el origen de coordenadas O' se encuentra en el vértice de la parábola. El punto O' tiene, por consiguiente, las coordenadas $\left(-\frac{\beta^2}{2\alpha};\ \gamma - \frac{\beta^2}{4\alpha}\right)$. Considerando en las fórmulas de traslación

$$a = -\frac{\beta}{2\alpha}, \quad b = \gamma - \frac{\beta^2}{4\alpha},$$

obtendremos

$$\begin{cases} x = -\frac{\beta}{2\alpha} + x', \\ y = \gamma - \frac{\beta^2}{4\alpha} + y'. \end{cases}$$

Así se expresan en el caso dado las coordenadas viejas x y y por medio de las nuevas x' y y'. Sustituyendo en la ecuación (4) las coordenadas viejas por las nuevas, obtenemos la ecuación

$$y' = \alpha x'^2, \quad \alpha \neq 0.$$

Así pues, si la parábola tiene en cierto sistema de coordenadas la ecuación (3), entonces siempre se puede pasar a un sistema de coordenadas nuevo, en el cual la ecuación de la parábola tendrá una forma más sencilla: $y' = \alpha x'^2$, $\alpha \neq 0$. Aún más, siempre se puede escoger un sistema de coordenadas de manera que el coeficiente en la ecuación de la parábola sea positivo. En efecto, sea que $\alpha < 0$, es decir, la parábola está situada tal, como está ilustrado en la figura 122. Entonces, en el sistema O', i'', j'', que se obtiene del sistema O', i', j', girando los ejes en un ángulo de $\alpha = 180°$, la ecuación de la parábola tendrá la forma $y'' = -\alpha x''^2$. Considerando que $\alpha_1 = -\alpha$, obtenemos $y'' = \alpha_1 x''^2$, donde $\alpha_1 > 0$.

3) Sea que en cierto sistema de coordenadas la parábola está definida por la ecuación

$$y = \alpha x^2, \quad \alpha > 0. \tag{5}$$

Pasemos a un nuevo sistema de coordenadas que se obtiene del inicial girando los vectores básicos en un ángulo de

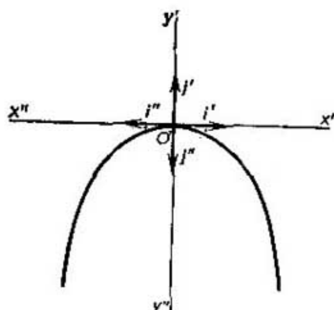


Fig. 122

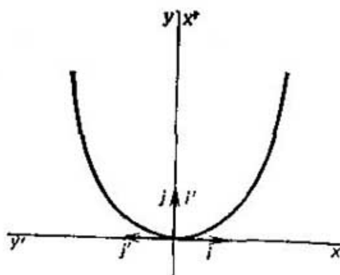


Fig. 123

$\alpha = 90°$ (fig. 123). Las fórmulas de giro toman, en este caso, la forma

$$\begin{cases} x = x' \cos 90° - y' \operatorname{sen} 90°, \\ y = x' \operatorname{sen} 90° + y' \cos 90° \end{cases} \quad \text{ó} \quad \begin{cases} x = -y'; \\ y = x'. \end{cases}$$

Sustituyendo en la ecuación (5) las coordenadas viejas por las nuevas, obtenemos

$$x' = \alpha y'^2 \quad \text{ó} \quad y'^2 = \frac{1}{\alpha} x'.$$

Designemos $\frac{1}{\alpha}$ con $2p$, entonces

$$y'^2 = 2px'.$$

Hemos obtenido la ecuación canónica de la parábola. Así pues, por medio de la ecuación (5) se define la parábola con el parámetro focal igual a $\frac{1}{2\alpha}$.

De los resultados obtenidos en el punto 2) se deduce, que el parámetro focal de la parábola definido por la ecuación $y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha \neq 0$ es igual a $\frac{1}{2|\alpha|}$.

Problema 2. Se da la ecuación de la parábola

$$y = 2x^2 + 6x + 7.$$

Hay que reducirla a la forma canónica. Hállese la distancia del foco de la parábola a su directriz.

△ Formemos un cuadrado perfecto en el segundo miembro de la ecuación dada

$$y = 2(x^2 + 3x) + 7 = 2\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{5}{2}.$$

Las coordenadas del vértice de la parábola son $\left(-\frac{3}{2};\ \frac{5}{2}\right)$.

Pasemos a un nuevo sistema de coordenadas, que se obtiene de la inicial trasladando el origen de coordenadas al pun-

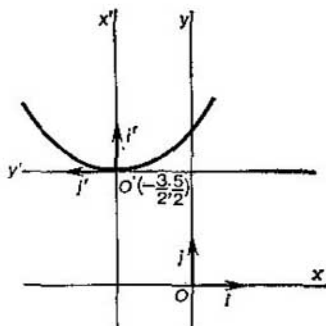


Fig. 124

to $O'\left(-\frac{3}{2};\ \frac{5}{2}\right)$ y girando los vectores básicos en un ángulo de $\alpha = 90°$ (fig. 124). Según las fórmulas (3) del § 13, obtenemos

$$\begin{cases} x = -\frac{3}{2} + x' \cos 90° - y' \operatorname{sen} 90° = -\frac{3}{2} - y'. \\ y = \frac{5}{2} + x' \operatorname{sen} 90° + y' \cos 90° = \frac{5}{2} + x'. \end{cases}$$

Sustituyendo estos valores de x y y en la ecuación de la parábola, obtendremos

$$\frac{5}{2} + x' = 2\left(-\frac{3}{2} - y' + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{5}{2},$$

es decir, $x' = 2y'^2$, ó $y'^2 = \frac{1}{2}x'$.

De la ecuación obtenida resulta que la distancia del foco de la parábola a la directriz (parámetro focal) es igual a $\frac{1}{4}$. ▲

4) Examinemos la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y_2}{b_2}=1, \quad a<b. \tag{6}$$

Esta ecuación se parece a la ecuación canónica de la elipse, pero no es tal, ya que en la ecuación canónica de la elipse $a \geqslant b$.

Pasemos del sistema de coordenadas xOy al sistema $x'Oy'$, que se obtiene del sistema inicial girando los vectores básicos en un ángulo de $\alpha = 90°$. Las fórmulas de giro tienen, en este caso, la forma

$$\begin{cases} x=-y', \\ y=x'. \end{cases}$$

Por lo tanto, en el nuevo sistema la ecuación dada se escribirá así:

$$\frac{x'^2}{b^2}+\frac{y'^2}{a^2}=1, \quad a<b.$$

Hemos obtenido la ecuación canónica de la elipse. Por consiguiente, por medio de la ecuación (6) se define la elipse cuyo eje mayor está situado en el eje Oy, y el eje menor, en el eje Ox. Los focos de tal elipse están situados en los puntos F_1 $(0; c)$ y F_2 $(0; -c)$, donde $c=\sqrt{b^2-a^2}$ (fig. 125).

Problema 3. Demuéstrese que la curva definida por la ecuación

$$25x^2+16y^2-50x+64y-311=0,$$

es una elipse. Hállense sus semiejes y las coordenadas de los focos. Hacer el dibujo.

△ Transformemos la ecuación dada en la forma

$$25(x-1)^2+16(y+2)^2=400.$$

Pasemos del sistema de coordenadas xOy al sistema $x'O'y'$, conservando la dirección de los ejes y pongamos el origen de coordenadas en el punto O' $(1; -2)$. Entonces, las coordenadas viejas y nuevas estarán ligadas por medio de las

fórmulas de traslación

$$\begin{cases} x = 1 + x', \\ y = -2 + y'. \end{cases}$$

Por lo tanto, en el nuevo sistema de coordenadas la curva tiene la ecuación

$$25x'^2 + 16y'^2 = 400$$

ó

$$\frac{x'^2}{16} + \frac{y'^2}{25} = 1.$$

Así pues, la curva dada es una elipse cuyos semiejes son iguales a 5 y 4. La distancia semifocal es $c = \sqrt{25 - 16} = 3$. Los focos de la elipse tienen en el nuevo sistema las

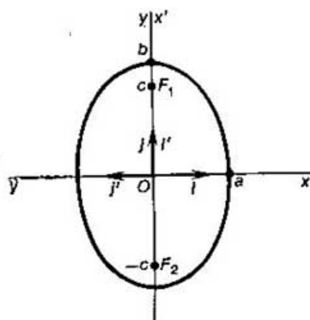


Fig. 125

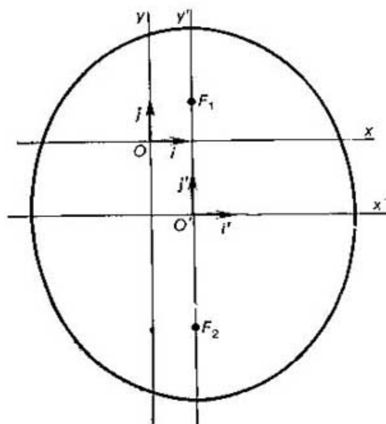


Fig. 126

coordenadas (0; 3) y (0; —3). Por las fórmulas de traslación hallamos sus coordenadas en el viejo sistema: son (1; 1) y (1; —5). El dibujo se da en la figura 126.

Problema 4. Escríbase la ecuación de la elipse, un eje de la cual pertenece al eje de ordenadas y es igual a 12, y el otro, al eje de las abscisas y es igual a 8.

△ Según la condición del problema $b = 6$, $a = 4$, por consiguiente,

$$\frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{6^2} = 1 \quad \text{ó} \quad \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{36} = 1. \ \blacktriangle$$

Problema 5. Escríbase la ecuación de la elipse, cuyo primer eje pertenece al eje de ordenadas y es igual a 20, y la distancia entre los focos es igual a 16. El centro de la elipse se encuentra en el punto (0; 0).

△ La ecuación buscada de la elipse puede ser escrita en la forma $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Puesto que $2c = 16$ y $2b = 20$ entonces $c = 8$, $b = 10$, y, como los focos están situados en el eje Oy, $a^2 = b^2 - c^2 = 100 - 64 = 36$. Por consiguiente, la elipse tiene la ecuación

$$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{100} = 1. \ \blacktriangle$$

Problema 6. Hállense las longitudes de los semiejes de la elipse $25x^2 + 16y^2 = 400$ y calcúlense las coordenadas de sus focos.

△ Escribamos la ecuación dada en la forma

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1.$$

Por consiguiente, $a^2 = 16$, $b^2 = 25$ y $c = \sqrt{b^2 - a^2} = \sqrt{25 - 16} = 3$. Como resultado tenemos $a = 4$, $b = 5$, $F_1\,(0;\ 3)$; $F_2\,(0;\ -3)$. ▲

§ 44. Ecuación general de segundo orden con dos variables

En el capítulo II hemos analizado la ecuación general de primer orden con dos variables, es decir, la ecuación que tiene la forma

$$Ax + By + C = 0, \quad A^2 + B^2 \neq 0. \tag{1}$$

Hemos establecido, que el conjunto de todos los puntos del plano, cuyas coordenadas x y y satisfacen la ecuación (1), es una recta.

La ecuación general de segundo orden con dos variables tiene la forma

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$
$$A^2 + B^2 + C^2 \neq 0. \qquad (2)$$

Surge la pregunta natural ¿qué representa el conjunto de los puntos del plano, cuyas coordenadas satisfacen la ecuación (2)? Con otras palabras, ¿qué conjuntos de los puntos del plano pueden definirse por medio de esta ecuación?

Mostremos, que existen ocho distintos tipos de tales conjuntos.

□ 1) Considerando que en la ecuación (2)

$$A = \frac{1}{a^2}, \quad C = \frac{1}{b^2}, \quad F = -1, \quad B = D = E = 0,$$

obtendremos

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Así pues, la ecuación (2) puede ser la ecuación de la elipse.

2) Poniendo en la ecuación (2)

$$A = \frac{1}{a^2}, \quad C = -\frac{1}{b^2}, \quad F = -1, \quad B = D = E = 0,$$

obtendremos

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Por consiguiente, la ecuación (2) puede ser una ecuación de la hipérbola.

3) Si en la ecuación (2) ponemos

$$C = 1, \quad D = -2p, \quad A = B = E = F = 0,$$

obtendremos

$$y^2 = 2px.$$

La ecuación (2) puede ser una ecuación de la parábola.

4) Si en la ecuación (2) los coeficientes se eligen de la manera siguiente:

$$A = a^2, \quad C = -b^2, \quad B = D = E = F = 0,$$

la ecuación tomará la forma

$$a^2x^2 - b^2y^2 = 0.$$

Puesto que $a^2x^2 - b^2y^2 = (ax - by)(ax + by)$, esta ecuación es una ecuación de dos rectas:

$$ax - by = 0 \text{ y } ax + by = 0.$$

De este modo, la ecuación (2) puede definir un par de rectas que se cortan.

5) Al tomar en la ecuación (2)

$$C = 1, \quad F = -a^2, \quad A = B = D = E = 0,$$

obtendremos

$$y^2 - a^2 = 0,$$

es decir, la ecuación de dos rectas $y = a$, $y = -a$.

Por consiguiente, la ecuación (2) puede ser la ecuación de dos rectas paralelas.

6) Considerando que en la ecuación (2)

$$C = 1, \quad A = B = D = E = F = 0,$$

obtendremos

$$y^2 = 0.$$

Tal ecuación se considera como una ecuación del par de rectas coincidentes, ya que de ella se deduce que $y \cdot y = 0$ y, igualando cada factor a cero, obtenemos $y = 0$ y $y = 0$. Así pues, por la ecuación (2) se puede definir un par de rectas coincidentes.

7) Si en la ecuación (2) tomamos

$$A = a^2, \quad C = b^2, \quad B = D = E = F = 0,$$

obtendremos

$$a^2x^2 + b^2y^2 = 0.$$

A esta ecuación la satisfacen las coordenadas sólo de un punto del plano, es decir, del punto (0; 0).

De aquí se deduce, que la ecuación (2) puede definir un punto.

8) Considerando que en la ecuación (2)

$$A = \frac{1}{a^2}, \quad C = \frac{1}{b^2}, \quad F = 1, \quad B = D = E = 0,$$

obtendremos

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1.$$

Esta ecuación no se satisface por las coordenadas de ningún punto del plano. Así sucede en el caso cuando

$$C = 1, \quad F = a^2 \neq 0, \quad A = B = D = E = 0.$$

En el plano no hay puntos, cuyas coordenadas satisfagan la ecuación

$$y^2 + a^2 = 0.$$

Así pues, la ecuación (2) puede ser una ecuación del conjunto vacío. ■

Hemos mostrado que la ecuación (2) puede ser una ecuación de 1) la elipse, 2) la parábola, 3) la hipérbola, 4) del par de rectas que se cortan, 5) del par de rectas paralelas, 6) del par de rectas coincidentes, 7) del punto, 8) del conjunto vacío. Es notable que, además de los ocho tipos de conjuntos citados, no existen otros conjuntos, cuyas ecuaciones tengan la forma (2). Esto se deduce de la siguiente afirmación que aceptamos sin demostrar.

Sea que un conjunto de los puntos del plano se define en cierto sistema de coordenadas por medio de la ecuación

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$
$$A^2 + B^2 + C^2 \neq 0.$$

Entonces, siempre es posible pasar (con ayuda de las fórmulas (3) del § 13) a un nuevo sistema de coordenadas, en el cual esta ecuación tendrá uno de los nuevo tipos siguientes:

1) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$; 2) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$; 3) $y^2 = 2px$;

4) $a^2x^2 - b^2y^2 = 0$; 5) $y^2 - a^2 = 0$; 6) $y^2 = 0$;

7) $a^2x^2 + b^2y^2 = 0$; 8) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$; 9) $y^2 + a^2 = 0$.

Las ecuaciones del 1) al 9) se denominan canónicas.

Los conjuntos, definidos por las ecuaciones del 4) al 6), están constituidos por rectas. Las rectas se estudian en el capítulo II. Los conjuntos definidos por las ecuaciones del 7) al 9) (el punto y el conjunto vacío) no presentan interés. Estas curvas tienen gran importancia para la cosmonáutica y astronomía, la mecánica y arquitectura. Eran ya conocidas en la Grecia antigua. Los matemáticos griegos no conocían ni el método de coordenadas ni las ecuaciones, no obstante les eran bien conocidas todas las propiedades de la elipse, hipérbola y parábola. Obtenían y estudiaban estas curvas como secciones planas de una superficie cónica (véase el

§ 77, capítulo VI). Desde entonces la elipse, hipérbola y parábola se denominan *secciones cónicas*. La elipse, hipérbola y parábola tienen también otra denominación común. Las ecuaciones de estas curvas contienen obligatoriamente por lo menos un sumando de segundo orden x^2, y^2 o xy. Por lo tanto, la elipse, hipérbola y parábola se denominan *curvas de segundo orden*.

A lo largo de toda la historia del desarrollo de la ciencia y la técnica las curvas de segundo orden han provocado constantemente la atención de muchos investigadores y científicos. Esto se debe a que la elipse, la hipérbola y la parábola son muy frecuentes en los fenómenos de la naturaleza y de la actividad humana que nos rodean. Demos sólo algunos ejemplos. Una piedra o proyectil lanzados bajo un ángulo agudo respecto al horizonte, vuela por una curva próxima a la parábola (la forma de la curva se distorsiona un poco debido a la resistencia del aire). Para construir diversos proyectores y antenas se utilizan los llamados «espejos parabólicos». En la producción se emplean, en algunos mecanismos, «piñones elípticos». A menudo dos magnitudes están relacionadas entre sí por una dependencia inversamente proporcional (por ejemplo, la presión y el volumen del gas de acuerdo con la ley de Boyle—Mariotte). De gráfico de tal dependencia funcional sirve la hipérbola.

Las curvas de segundo orden adquirieron un significado científico especialmente grande después de los descubrimientos hechos por el astrónomo alemán Johannes Kepler (1571—1630) y por el físico y matemático inglés Isaac Newton (1643—1727). Observando los desplazamientos visibles de los planetas en la esfera celeste, Kepler descubrió tres leyes, una de las cuales postula, que cada planeta se mueve por una elipse y el Sol se encuentra en uno de sus focos. Newton no sólo fundamentó teóricamente las leyes del movimiento de los planetas, sino que demostró, que todo cuerpo puede moverse bajo la acción de la atracción de otro cuerpo solamente bien por una elipse, bien por una parábola o bien por una hipérbola. En particular, por estas curvas se mueven todos los cometas del sistema solar.

Actualmente cuando en torno a la Tierra giran por las órbitas elípticas millares de satélites artificiales, cuando han sido enviadas a la Luna, Venus y Marte decenas de estaciones cósmicas, las curvas de segundo orden se utilizan aún más intensamente que antes.

Problemas para el capítulo III

3.1. Escríbase la ecuación de la circunferencia:

a) de radio $R = 4$ con el centro en el origen de coordenadas;

b) de radio $R = \frac{4}{3}$ con el centro en el origen de coordenadas;

c) de radio $R = 5$ con el centro en el punto $C(-4;\ 2)$;

d) de radio $R = \frac{7}{5}$ con el centro en el punto $C\left(-1;\ -\frac{3}{5}\right)$.

3.2. Hállense el centro y el radio de la circunferencia:

a) $x^2+y^2=36$; b) $x^2+y^2=7$;

c) $(x-5)^2+(y-3)^2=49$; d) $(x+7)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=64$;

e) $(x-2{,}5)^2+y^2=50$.

3.3. Demuéstrese que la ecuación dada es una ecuación de la circunferencia. Hállense su centro y radio:

a) $x^2-2x+4y+y^2-20=0$;

b) $x^2-6x+10y+y^2+9=0$.

3.4. Fórmese la ecuación de la circunferencia, cuyo centro coincide con el origen de coordenadas, si la circunferencia es tangente a la recta $x = 3$.

3.5. Escríbase la ecuación de la circunferencia, cuyo centro se encuentra en el punto $C(3;\ 7)$, si se sabe que es tangente al eje Ox.

3.6. Escríbase la ecuación de la circunferencia, cuyo centro está situado en el punto de intersección de las rectas $2x+3y-13=0$, $x+y-5=0$, si es tangente al eje de ordenadas.

3.7. Escríbase la ecuación de la circunferencia, que pasa por el punto $N(6;\ 2)$ con el centro en el punto $C(2;\ -1)$.

3.8. Escríbase la ecuación de la circunferencia, cuyo centro se encuentra en el eje de abscisas, si la circunferencia es tangente a las rectas $x = 8$ y $y = 3$.

3.9. Escríbase la ecuación de la circunferencia, si se sabe que es tangente al eje de abscisas y a las rectas $x = -1$ y $x = 5$.

3.10. Escríbase la ecuación de la circunferencia, que pasa por el punto $M(2;\ 1)$ y es tangente a los ejes de coordenadas.

3.11. Determínese, cómo está situado el punto $M(-2;\ 1)$ respecto a cada una de las circunferencias (dentro, fuera o en la circunferencia):

a) $x^2+y^2=2$; b) $x^2+y^2-5=0$; c) $x^2+y^2=25$;

d) $x^2+y^2-8x-4y=5$; e) $x^2+y^2+6x-8y=0$;

f) $x^2+y^2=0{,}01$.

3.12. Determínese cómo está situada la recta respecto a la circunferencia (la interseca, es tangente a ella o pasa fuera de ésta), si la recta y la circunferencia están definidas por las ecuaciones siguientes:

a) $2x-y-3=0$ y $x^2+y^2-3x+2y-3=0$;

b) $x-2y-1=0$ y $(x-4)^2+(y+1)^2=5$;

c) $x+3y+10=0$ y $x^2+y^2=1$.

3.13. Hállese la ecuación de la línea de los centros de dos circunferencias $(x-2)^2+y^2=16$ y $x^2+(y-3)^2=9$.

3.14. Se dan los puntos M_1 (2; 3) y M_2 (10; 9). Escríbase la ecuación de la circunferencia, cuyo diámetro es el segmento M_1M_2.

3.15. Una circunferencia es tangente al eje de ordenadas en el origen de coordenadas y pasa a través del punto M_1 (—4; 0). Escríbase la ecuación de la circunferencia y hállense los puntos de intersección con las bisectrices de los ángulos de coordenadas.

3.16. Escríbase la ecuación de la circunferencia que pasa por tres puntos M_1 (0; 0), M_2 (3; 0) y M_3 (0; 4).

3.17. Escríbase la ecuación de la circunferencia, circunscrita alrededor de un triángulo, cuyos lados pertenecen a las rectas $x - 3y + 1 = 0$, $9x - 2y - 41 = 0$, $7x + 4y + 7 = 0$.

3.18. Determínense las coordenadas de los puntos de intersección de la recta $y - 7x - 12 = 0$ y la circunferencia $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 25$.

3.19. Escríbase la ecuación del diámetro de la circunferencia $x^2 + y^2 = 25$ el cual es perpendicular a la recta $4x + 3y - 25 = 0$.

3.20. Calcúlese la distancia más corta del punto A (8; —6) a la circunferencia $x^2 + y^2 - 4 = 0$.

3.21. Escríbase la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos M (4; 1) y N (0; 5), si se sabe que su centro se encuentra en la recta $x + y + 3 = 0$.

3.22. Hállese la ecuación de la circunferencia que es simétrica a la circunferencia $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 1$ respecto a la recta $y = x - 3$.

3.23. La circunferencia está definida por las ecuaciones $x = \sqrt{2} \cos t$, $y = \sqrt{2} \operatorname{sen} t$ $0 \leqslant t < 2\pi$. Escríbase la ecuación canónica de esta circunferencia.

3.24. La circunferencia está definida por la ecuación $x^2 + y^2 = 25$. Escríbase la ecuación paramétrica de esta circunferencia.

3.25. Las circunferencias están definidas por las ecuaciones $x = 4 \cos t$, $y = 4 \operatorname{sen} t$ $(0 \leqslant t < 2\pi)$ y $(x - 1)^2 + y^2 = 25$. Hállense los puntos de intersección de las circunferencias dadas.

3.26. Escríbase la ecuación canónica de la elipse, si la distancia focal es igual a 8 y la elipse pasa a través del punto (0; —3).

3.27. Escríbase la ecuación canónica de la elipse, si su foco se encuentra en el punto (6; 0) y la elipse corta el eje de ordenadas en el punto (0; —3).

3.28. Demuéstrese que la ecuación $7x^2 + 16y^2 - 112 = 0$ es una ecuación de la elipse. Hállense las coordenadas de los focos y la distancia focal.

3.29. Escríbase la ecuación canónica de la elipse, si:

a) sus semiejes son iguales a 7 y 3;

b) sus semiejes son iguales a 3 y 4;

c) su semieje mayor es igual a 5 y la distancia focal es igual a 6;

d) su semieje menor es igual a 4 y la distancia focal es igual a 6.

3.30. Determínense para cada una de las siguientes elipses sus semiejes, las coordenadas de los vértices y focos:

a) $9x^2 + 16y^2 = 144$; b) $x^2 + 9y^2 = 4$;

c) $4x^2 + 9y^2 = 1$; d) $0{,}25x^2 + y^2 = 1$.

3.31. Se da la elipse $4x^2 + 25y^2 - 100 = 0$. Determínense las ordenadas de los puntos de la elipse, cuyas abscisas son iguales a —3.

3.32. Las ordenadas de los puntos de la circunferencia $x^2 + y^2 = 36$ están disminuidas en 3 veces por el valor absoluto. Escríbase la ecuación de la nueva curva obtenida.

3.33. Se da la elipse $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$. Hállense su semieje mayor, su semieje menor, la distancia focal, las coordenadas de los focos y de las vértices y la excentricidad.

3.34. Se da la elipse $25x^2+49y^2=1225$. Determínense las longitudes de los ejes, las coordenadas de los focos y la excentricidad.

3.35. Escríbase la ecuación canónica de la elipse, si su semieje mayor $a=5$ y la excentricidad $\varepsilon=\frac{3}{5}$.

3.36. Escríbase la ecuación canónica de la elipse, cuya distancia del foco a los extremos del eje mayor son iguales a 1 y 9.

3.37. La Tierra se mueve por una órbita elíptica, en uno de cuyos focos se encuentra el Sol. Calcúlese la excentricidad de la órbita de la Tierra, si el punto de la órbita terrestre (perihelio) más próximo al Sol se encuentra a la distancia de 147 millones de km de éste y el punto de la órbita terrestre más alejado del Sol (afelio), a la distancia de 152 millonesde km de él.

3.38. El nueve de julio de 1980 fueron lanzados en la Unión Soviética, con un cohete portador, ocho satélites artificiales de la Tierra «Cosmos-1192-1199». Calcúlese la excentricidad de la órbita de estos satélites artificiales, si todos los ochos satélites se mueven por una órbita elíptica, en uno de cuyos focos se encuentra el centro de la Tierra. La distancia máxima de la superficie de la Tierra es de 1522 km; la distancia mínima de la superficie de la tierra es de 1451 km. El radio medio de la Tierra es igual aproximadamente a 6371 km.

3.39. Escríbase la ecuación canónica de la elipse, si la elipse pasa por el punto M (2; −2), y su semieje mayor es igual a 4.

3.40. Hállese la excentricidad de la elipse $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{64}=1$.

3.41. Hállese la ecuación canónica de la elipse, si los extremos de su eje mayor son tangentes a la circunferencia $x^2+y^2=100$, y se sabe que $a=2b$.

3.42. Calcúlese el área del cuadrilátero, cuyos dos vértices se encuentran en los focos de la elipse $9x^2+25y^2-225=0$ y los otros dos vértices coinciden con los extremos de su eje menor.

3.43. El lado del rombo es igual a 10. A través de sus dos vértices opuestos pasa una elipse, cuyos focos coinciden con los otros dos vértices del rombo. Escríbase la ecuación de la elipse, tomando por ejes de coordenadas las diagonales del rombo, si las coordenadas del foco son (8; 0).

3.44. Determínese la longitud de la cuerda de la elipse $\frac{x^2}{18}+\frac{y^2}{9}=$ $=1$ que divide por la mitad el ángulo entre los ejes.

3.45. Se da la elipse $15x^2+25y^2-375=0$. A través del foco está trazada una perpendicular a su eje mayor. Determínese la distancia desde los puntos de intersección de esta perpendicular con la elipse hasta el foco.

3.46. Escríbanse las ecuaciones paramétricas de la elipse $4x^2+$ $+9y^2-36=0$.

3.47. Se dan las ecuaciones paramétricas de la elipse

$$x=7\cos t,\quad y=4\operatorname{sen} t.$$

Escríbase su ecuación canónica.

3.48. Hállense las ecuaciones de las tangentes a la elipse $9x^2 + 25y^2 = 225$, cuyo coeficiente angular es igual a $\frac{3}{5}$.

3.49. Hállese el punto de tangencia de la recta $5x - 2y - 30 = 0$ con la elipse $75x^2 + 24y^2 - 1800 = 0$.

3.50. Se dan la elipse $25x^2 + 36y^2 - 900 = 0$ y la circunferencia $x^2 + y^2 = 25$. Hállense los puntos de su intersección.

3.51. Escríbase la ecuación de la tangente a la elipse en el punto $(3; -3)$, si su ecuación es $36x^2 + 12y^2 - 432 = 0$.

3.52. Escríbase la ecuación canónica de la hipérbola, si la distancia focal es igual a 30 y la hipérbola pasa por el punto $(-9; 0)$.

3.53. Escríbase la ecuación canónica de la hipérbola, si su foco se encuentra en el punto $(-5\sqrt{2}; 0)$ y la hipérbola corta el eje de las abscisas en el punto $(6; 0)$.

3.54. Demuéstrese que la ecuación $11x^2 - 25y^2 - 275 = 0$ es una ecuación de la hipérbola. Hállense las coordenadas de los focos.

3.55. Determínense los semiejes de cada una de las hipérbolas siguientes:

a) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$; b) $16x^2 - y^2 = 1$; c) $x^2 - 9y^2 = 9$;

d) $16x^2 - 9y^2 = 1$; f) $x^2 - y^2 = 4$; g) $9x^2 - 16y^2 = 144$.

3.56. Para la hipérbola $9x^2 - 16y^2 - 144 = 0$ hállense:

a) los semiejes;

b) las coordenadas de los focos;

c) las coordenadas de los vértices;

d) las ecuaciones de las asíntotas.

3.57. Escríbase la ecuación canónica de la hipérbola, si:

a) su semieje real es igual a 4, y el imaginario, a 13;

b) la distancia focal es igual a 16, y el semieje imaginario, a 6;

c) la distancia focal es igual a 6 y $\varepsilon = 1,5$;

d) el semieje real es igual a 8 y $\varepsilon = \frac{5}{4}$;

e) la ecuación de la asíntota es $y = \frac{3}{2}x$, y el semieje real es igual a 2;

f) el semieje imaginario es igual a 3 y $\varepsilon = \frac{5}{4}$.

3.58. Escríbase la ecuación canónica de la hipérbola, si las distancias de uno de sus vértices a los focos son iguales a 9 y 1, respectivamente.

3.59. Se da la hipérbola $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{36} = 1$; escríbanse las ecuaciones de las rectas paralelas, que limitan una parte del plano, que no contiene ni un solo punto de la hipérbola.

3.60. Hállense las asíntotas de la hipérbola $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1$. Constrúyase la hipérbola y hállese su excentricidad.

3.61. Hállense las asíntotas de la hipérbola $x^2 - y^2 = 9$. Constrúyase la hipérbola y calcúlese su excentricidad.

3.62. Se da la ecuación de la hipérbola $9x^2 - 16y^2 = 144$. Hállense las coordenadas de sus focos y vértices, la excentricidad y la ecuación de las asíntotas. Hágase el dibujo.

3.63. Fórmese la ecuación canónica de la hipérbola, si su semieje real es igual a 5, y la excentricidad a 1,4.

3.64. Determínense bajo qué condición las asíntotas de la hipérbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ son perpendiculares entre sí.

3.65. Fórmese la ecuación de la hipérbola, si la ecuación de su asíntota es $y = \frac{1}{2}x$, y uno de los focos se encuentra en el punto $(-5; 0)$.

3.66. Escríbase la ecuación canónica de la hipérbola, conociendo, que sus asíntotas tienen la ecuación $y = \pm 2x$, y la distancia focal es igual a 10.

3.67. Se] da la hipérbola $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$. Hállense los puntos de intersección de la hipérbola con las rectas:

a) $x - y + 1 = 0$;
b) $9x - 4y - 36 = 0$;
c) $5x - 4y - 16 = 0$.

3.68. Fórmese la ecuación de la hipérbola, cuyos focos se encuentran en los vértices de la elipse $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{36} = 1$ y los vértices, en los focos de la elipse.

3.69. Los focos de la hipérbola coinciden con los focos de la elipse $9x^2 + 25y^2 - 225 = 0$. Escríbase la ecuación de la hipérbola, si su excentricidad es igual a 2.

3.70. Hállense las ecuaciones de las tangentes a la hipérbola $x^2 - y^2 = 1$, cuyo coeficiente angular es igual a 2.

3.71. La excentricidad de la trayectoria del movimiento del primer cohete espacial soviético, lanzado hacia la Luna el 2 de enero de 1959 es igual a 1,05. Determínese la forma de la trayectoria del cohete.

3.72. Escríbase la ecuación de la parábola, si las coordenadas del foco son $(4; 0)$ y la ecuación de la directriz es $x + 4 = 0$.

3.73. Escríbase la ecuación canónica de la parábola, que pasa a través del punto $(5; 3)$.

3.74. Se da la parábola $y^2 = 5x$. Hállense los puntos de la parábola, cuya distancia del foco es igual a 4.

3.75. Fórmese la ecuación canónica de la parábola, cuyo foco se encuentra en el punto de intersección de la recta $2x - 5y - 8 = 0$ con el eje de las abscisas. Constrúyase esta parábola.

3.76. Fórmese la ecuación canónica de la parábola que pasa por el punto $N(9; 6)$, determínese el ángulo $\alpha = \widehat{(\mathbf{i}; \overrightarrow{FN})}$, donde F es un foco de la parábola.

3.77. Hállense los puntos de intersección de la parábola $y^2 = 4x$ y las rectas:

a) $x = y$; b) $x = -y$;
c) $x - 2y + 4 = 0$;
d) $3x - 2y + 1 = 0$.

Constrúyase el dibujo.

3.78. Escríbase la ecuación de la tangente a la parábola $y^2 = 6x$ en el punto (6; 6).

3.79. Escríbase la ecuación de la circunferencia, cuyo centro coincide con el foco de la parábola $y^2 = 8x$, si se sabe que la circunferencia es tangente a la directriz de la parábola. Determínense las coordenadas de los puntos de intersección de la parábola y la circunferencia, y constrúyase el dibujo.

3.80. Redúzcase la ecuación de la elipse $\frac{(x+6)^2}{4} + \frac{(y-3)^2}{9} = 1$ a la forma canónica.

3.81. Se da la hipérbola $xy = 2$. Redúzcase su ecuación a la forma canónica.

3.82. Redúzcase la ecuación de la parábola $3y = x^2 + 4x - 11$ a la forma canónica.

3.83. Determínense para cada una de las siguientes elipses sus semiejes, coordenadas de los vértices y coordenadas de los focos:

a) $12x^2 + 5y^2 - 60 = 0$;

b) $16x^2 + 9y^2 - 144 = 0$;

c) $4x^2 + y^2 = 9$.

3.84. Escríbase la ecuación de la elipse, situada simétricamente respecto a los ejes de coordenadas con los focos en el eje Oy, si:

a) sus semiejes son iguales a 3 y 4;

b) sus semiejes son iguales a 6 y 3;

c) su eje mayor es igual a 8 y su distancia focal, a 6;

d) su semieje menor es igual a 4 y la excentricidad $\varepsilon = \frac{3}{5}$;

e) su semieje menor es igual a 6 y la distancia focal, a 8.

3.85. Escríbase la ecuación de la elipse, cuya suma de los semiejes es igual a 8 y la distancia entre los focos es igual a 8. Los focos se encuentran en el eje de ordenadas y están situados semétricamente respecto al punto (0; 1).

3.86. Se da la elipse $16x^2 + 7y^2 - 112 = 0$. Determínense las coordenadas de los puntos de la elipse, cuya distancia al foco es igual a 2,5.

3.87. La circunferencia $(x-5)^2 + (y-3)^2 = 4$ es tangente a la elipse y pasa por sus focos. Fórmese la ecuación de la elipse, si su eje mayor es paralelo al eje de las abscisas.

3.88. Fórmese la ecuación de la hipérbola, situada simétricamente respecto a los ejes de coordenadas, con los focos en el eje de ordenadas, si:

a) los semiejes son iguales a 3 y 6;

b) $c = 5$; $\varepsilon = \frac{5}{3}$;

c) la ecuación de la asíntota es $y = \frac{12}{5}x$, y el eje real es igual a 24;

d) $\varepsilon = \frac{5}{3}$, y el semieje es igual a 4.

3.89. Para la hipérbola $9x^2 - 16y^2 = -144$ hállense: a) los semiejes; b) las coordenadas de los vértices; c) las coordenadas de los focos; d) las ecuaciones de las asíntotas.

3.90. Escríbase la ecuación de la hipérbola, si la distancia entre sus vértices es igual a 24, y los focos tienen las coordenadas (—10; 2) y (16; 2).

3.91. Fórmese la ecuación de la hipérbola, si sus semiejes son iguales a 5 y 4, el centro tiene las coordenadas (3; 2), y el eje real es paralelo al eje de las abscisas.

3.92. Escríbase la ecuación de la parábola con el vértice en el origen de coordenadas, si:

a) la parábola está situada en el semiplano superior simétricamente respecto al eje de ordenadas y el parámetro focal es igual a 4;

b) la parábola está situada en el semiplano inferior simétricamente respecto al eje de ordenadas y el parámetro focal es igual a 6;

c) la parábola está situada en el semiplano derecho simétricamente respecto al eje de las abscisas, y su parámetro focal es igual a 3;

d) la parábola está situada en el semiplano izquierdo simétricamente respecto al eje de las abscisas y su parámetro focal es igual a 5.

3.93. Escríbase la ecuación de la parábola que pasa por el origen de coordenadas y es simétrica respecto al eje de ordenadas, si las coordenadas del foco son F (0; —3).

3.94. El foco de la parábola tiene las coordenadas F (—6; 0), y la ecuación de la directriz es $x - 6 = 0$. Fórmese la ecuación de la parábola.

3.95. Hállese la ecuación de la parábola, conociendo, que su vértice se encuentra en el eje A (—4; 5), y el foco, en el punto B (—2; 5). Escríbase la ecuación de su eje y de la directriz.

3.96. Se dan el foco de la parábola (—3; —4) y la ecuación de su directriz $x + 1 = 0$. Escríbase la ecuación de la parábola y hállense los puntos de intersección de la parábola con los ejes de coordenadas.

3.97. Determínense las coordenadas del punto que está situado en la parábola $x^2 = 8y$, si la distancia de este punto a la directriz es igual a 4.

3.98. Constrúyanse en un solo dibujo las siguientes parábolas: $x^2 = \frac{1}{2} y$, $x^2 = y$, $x^2 = 2y$.

3.99. El foco de una parábola está situado en el punto $F\left(0; \frac{1}{4}\right)$, la directriz es paralela al eje de abscisas y corta en el eje de ordenadas un segmento cuya longitud es igual a $\frac{1}{4}$. Escríbase la ecuación de la parábola.

3.100. La parábola pasa por los puntos A (0; 6) y B (4; 0) simétricamente respecto al eje de abscisas. Escríbase la ecuación de la parábola y constrúyala.

3.101. Fórmese la ecuación de la parábola y escríbase la ecuación de su directriz, si la parábola pasa por los puntos de intersección de la recta $y = x$ y la circunferencia $x^2 + y^2 - 10y = 0$ y es simétrica respecto al eje de ordenadas. Constrúyanse la circunferencia, la recta y la parábola.

3.102. Escríbase la ecuación de la tangente a la parábola $x^2 = 6y$ en el punto $\left(2; \frac{2}{3}\right)$.

3.103. La cuerda del puente colgante tiene la forma de una parábola (fig. 127). Se requiere formar su ecuación respecto a los ejes de coordenadas señalados en la figura, si la flecha de la cuerda $|OA| = 10$ y la longitud del puente $|BC| = 60$.

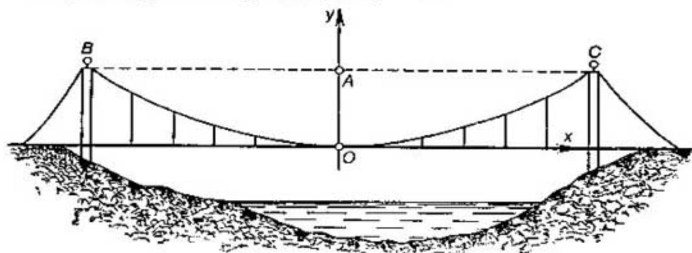


Fig. 127

3.104. Qué conjunto está definido en el plano por las siguientes ecuaciones de segundo orden:

a) $3x^2 + 4y = 12$; b) $3x^2 - 4y^2 = 12$;
c) $x^2 - 4y = 3$; d) $y^2 - 4x = 0$;
e) $25x^2 - 9y^2 = 0$; f) $5y^2 - 125 = 0$;
g) $36x^2 + 49y^2 = 0$; h) $x^2 + (y - 2)^2 = 7$;
i) $5x^2 - 10x + 3y^2 + 6y + 7 = 0$.

Capítulo IV

RECTAS Y PLANOS EN EL ESPACIO. POLIEDROS

§ 45. Axiomas principales de la estereometría

Las figuras tridimensionales (cuerpos) más sencillas son: el cubo, el prisma, la pirámide, la esfera, el cono, el cilindro, etc., y sus propiedades ya se estudian en el curso de geometría de la escuela secundaria. Es de señalar, que algunas propiedades de las figuras tridimensionales se utilizaron al estudiar los vectores en el capítulo I del presente manual.

En este capítulo se estudia, más detalladamente que antes, la parte de la geometría relativa a la posición de las rectas y planos en el espacio. La parte de la geometría que dedica al estudio de las figuras situadas en el espacio, se denomina *estereometría*.

Las nociones principales de la estereometría son *el punto, la recta* y *el plano*. El espacio está constituido por un conjunto infinito de puntos. Las rectas y los planos constan de un conjunto infinito de puntos del plano y no coinciden con todo el espacio.

Enunciemos *los axiomas principales de la estereometría*. Recordemos, que los axiomas son proposiciones adoptadas sin demostraciones. Los axiomas de la geometría son una abstracción de las respectivas propiedades del mundo real que nos rodea.

Supongamos, que para cualquier plano del espacio se cumplan todos los axiomas, definiciones y teoremas de la planimetría. Supongamos, además, que son válidos los siguientes axiomas de la estereometría:

1. *A través de dos puntos distintos cualesquiera se traza una sola recta.*

2. *Si dos puntos distintos de una recta pertenecen al plano, todos los puntos de la recta pertenecen a este plano.*

3. *A través de tres puntos cualesquiera, que no están situados en una misma recta, pasa uno y sólo un plano.*

4. *Si dos planos distintos se cortan, entonces se intersecan por la recta.*

Utilizando estos axiomas, demostremos las siguientes afirmaciones:

1. *A través de una recta y un punto que no le pertenece pasa un único plano.*

2. *A través de dos rectas que se intersecan pasa un único plano.*

□ 1. Tomemos en la recta dada l dos puntos cualesquiera A y B (fig. 128). Entonces, de acuerdo con el axioma 3 a través del punto dado M y los puntos A y B pasa

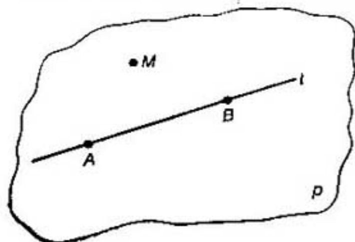


Fig. 128

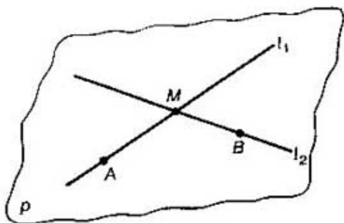


Fig. 129

un solo plano p y todos los puntos de la recta l pertenecen al plano p. Por consiguiente, el plano p pasa por la recta l y por el punto M que no le pertenece. No hay otro plano igual, ya que él debe pasar por tres puntos A, B, M, que no están situados en una misma recta y, por consiguiente, debe coincidir con el plano p. ■

2. Efectivamente, sea que las rectas l_1 y l_2 se intersecan en el punto M (fig. 129). Tomemos en las rectas l_1 y l_2 cualesquiera puntos A y B, diferentes del punto M. Entonces, a través de los tres puntos A, B, M pasa un único plano p. En virtud del axioma 2 el plano p pasa por las rectas dadas l_1 y l_2.

§ 46. Posición recíproca de las rectas en el espacio

Dos puntos distintos en el espacio pueden situarse o no situarse en un mismo plano. Examinemos los respectivos ejemplos.

Sea que los puntos A, B, C no se encuentran en una misma recta. Tracemos a través de ellos el plano p y escojamos cierto punto S, que no pertenece al plano p (fig. 130).

Entonces, las rectas AB y BC están situadas en un mismo plano, o sea, en el plano p, las rectas AS y CB no se encuentran en un mismo plano. Efectivamente, si ellas estuviesen situadas en un mismo plano, también los puntos A, B, C, S se encontrarían en este plano, lo que es imposible, ya que S no está situado en el plano, que pasa por los puntos A, B, C.

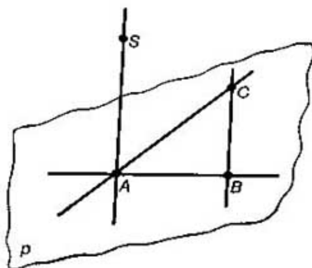


Fig. 130

Dos rectas distintas que están situadas en un mismo plano y no se intersecan, se denominan *paralelas*. Las rectas coincidentes también se denominan paralelas. Si las rectas l_1 y l_2 son paralelas, se escribe $l_1 \parallel l_2$.

De este modo, $l_1 \parallel l_2$, si, primero, existe un plano p tal que $l_1 \subset p$ y $l_2 \subset p$ y, segundo, bien $l_1 \cap l_2 = \varnothing$ o bien $l_1 = l_2$.

Dos rectas que no están situadas en un mismo plano se denominan *cruzadas*. Es evidente, que las rectas cruzadas no se intersecan y son paralelas.

Demostremos una propiedad muy importante de las rectas paralelas, denominada *transitividad del paralelismo*.

Teorema. *Si dos rectas son paralelas a la tercera, son paralelas entre sí.*

□ Sea que $l_1 \parallel l_2$ y $l_2 \parallel l_3$. Es necesario demostrar que $l_1 \parallel l_3$.

Si las rectas l_1, l_2, l_3 están situadas en un mismo plano, entonces esta afirmación fue demostrada en la planimetría. Supongamos que las rectas l_1, l_2, l_3 no se encuentran en un mismo plano.

Tracemos a través de las rectas l_1 y l_2 el plano p_1 y a través de las rectas l_2 y l_3, el plano p_2 (fig. 131).

Es de señalar, que la recta l_3 contiene por lo menos un punto M, que no pertenece al plano p_1.

Tracemos a través de la recta l_1 y el punto M el plano p_3, el cual se cortará con el plano p_2 por una cierta recta l.

Demostremos que l coincide con l_3. Demostrémoslo, recurriendo al «método a la inversa».

Supongamos que la recta l no coincide con la recta l_3. Entonces, l interseca la recta l_2 en un cierto punto A. De

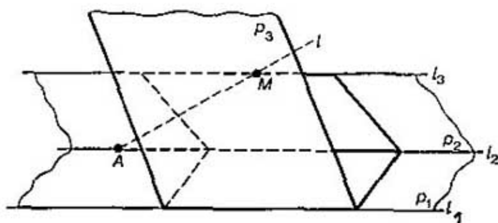


Fig. 131

aquí se deduce, que el plano p_3 pasa a través del punto $A \in p_1$ y de la recta $l_1 \subset p_1$ y, por consiguiente, coincide con el plano p_1. Esta deducción contradice, a que el punto $M \in p_3$ no pertenece al plano p_1. Por consiguiente, nuestra suposición no es válida y, por lo tanto, $l = l_3$.

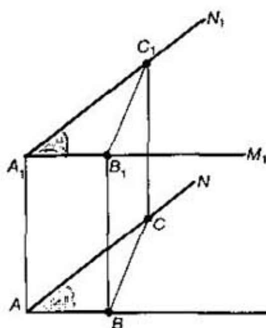


Fig. 132

Así pues, está demostrado que las rectas l_1 y l_3 están situadas en el mismo plano p_3. Demostremos que las rectas l_1 y l_3 no se intersecan.

Realmente, si l_1 y l_3 se intersecaran, por ejemplo, en el punto B, el plano p_2 pasaría a través de la recta l_2 y del punto $B \in l_1$, y por consiguiente, coincidiría con p_1, lo que es imposible. ■

Problema. Demostrar, que los ángulos con los lados codirigidos tienen iguales magnitudes.

△ Sea que los ángulos MAN y $M_1A_1N_1$ tienen los lados codirigidos: el rayo AM es codirigido con el rayo A_1M_1, y el rayo AN está codirigido con el rayo A_1N_1 (fig. 132). Tracemos en los rayos AM y A_1M_1 los segmentos AB y A_1B_1,

cuyas longitudes son iguales. Entonces,

$$[BB_1] \parallel [AA_1] \text{ y } |BB_1| = |AA_1|$$

como lados opuestos del paralelogramo.

Análogamente, tracemos en los rayos AN y A_1N_1 los segmentos AC y A_1C_1, cuyas longitudes son iguales. Entonces,

$$[CC_1] \parallel [AA_1] \text{ y } |CC_1| = |AA_1|.$$

De la transitividad del paralelismo se deduce que $[BB_1] \parallel \parallel [CC_1]$. Y puesto que $|BB_1| = |CC_1|$, entonces BB_1C_1C es un paralelogramo, y, por lo tanto, $|BC| = |B_1C_1|$.

Por consiguiente, $\triangle ABC \cong \triangle A_1B_1C_1$ y $\widehat{BAC} = \widehat{B_1A_1C_1}$. ▲

§ 47. Criterio de paralelismo de una recta y un plano

Si una recta pertenece al plano o no tiene con éste ni un solo punto común, la recta y el plano se denominan *paralelos*. Si la recta l y el plano p son paralelos, escribamos $l \parallel p$. Así pues, $l \parallel p$, si $l \subset p$ o $l \cap p = \varnothing$.

Demostremos en primer término, un teorema no complicado, pero importante.

Teorema 1. *Si los planos p y q se intersecan y la recta $l \subset q$ es paralela al plano p, l es paralela a la recta, que sirve de intersección de los planos p y q.*

□ El caso cuando l se encuentra en el plano p, es evidente, ya que entonces $l = p \cap q$.

Sea que l no tiene puntos comunes con p. Entonces, si las rectas l y $l_1 = p \cap q$ se intersecaran, la recta l se intersecaría con el plano p, lo que contradice a la condición. Por consiguiente, las rectas l y l_1 son paralelas. ■

Demostremos ahora el siguiente *criterio de paralelismo de una recta y un plano.*

Teorema 2. *Para que la recta l sea paralela al plano p, es necesario y suficiente, que la recta l sea paralela a cierta recta situada en el plano p.*

□ Señalemos que el caso cuando l se encuentra en el plano p, es evidente. Por lo tanto examinaremos sólo el caso, cuando l no está situada en p.

Sea que la recta l y el plano p son paralelos (fig. 133). Demostremos que entonces en el plano p se tiene una recta, paralela a la recta l. Tracemos el plano q a través de la recta

l y de un cierto punto $M \in p$. Entonces, la recta l es paralela a la recta l_1, que es la intersección de los planos p y q.

Demostremos ahora la afirmación recíproca: si en el plano p se tiene una recta paralela a l, l es paralela a p.

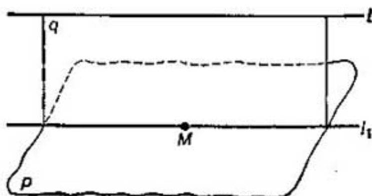


Fig. 133

Sea que l es paralela a la recta $l_1 \subset p$. Supongamos que l y p tienen un punto común M_0. Entonces, M_0 pertenece al plano p y al plano q, en el cual están situadas las rectas l y l_1 y, por lo tanto, M_0 pertenece a la recta $l_1 = p \cap q$, lo que contradice a la condición. Por consiguiente, la recta l y el plano p no tienen puntos comunes.

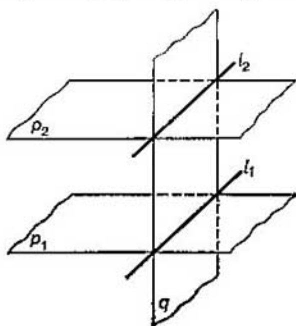


Fig. 134

§ 48. Planos paralelos

Dos planos p y q se denominan *paralelos*, si coinciden o no tienen puntos comunes. Si p y q son paralelos, se escribe $p \parallel q$. Así pues, $p \parallel q$, si bien $p = q$ o bien $p \cap q = \varnothing$.

Teorema 1. *Si dos planos paralelos están cortados por el tercer plano, las rectas de intersección son paralelas.*

□ Sea que los planos paralelos p_1 y p_2 están cortados por el plano q, y sea que $l_1 = p_1 \cap q$, $l_2 = p_2 \cap q$ (fig. 134). Examinemos el caso sustancial cuando p_1 y p_2 son distintos. En este caso, las rectas l_1 y l_2 no pueden tener puntos comunes, ya que su punto común también sería común para los planos p_1 y p_2.

De este modo, las rectas l_1 y l_2 están situadas en el mismo plano q y no tienen puntos comunes. Conforme a la definición $l_1 \parallel l_2$. ■

Demostremos ahora, el siguiente *criterio de paralelismo de dos planos*.

Teorema 2. *Si dos rectas paralelas que se cortan de un plano son paralelas respectivamente a dos rectas de otro plano, estos planos son paralelos.*

□ Si los planos p_1 y p_2 coinciden, entonces, de acuerdo a la definición, tenemos $p_1 \parallel p_2$.

Examinemos el caso cuando p_1 y p_2 son planos distintos. Sea que las rectas a_1 y b_1, que se cortan y pertenecen al

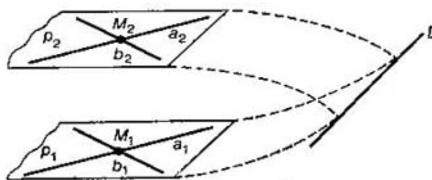


Fig. 135

plano p_1, son respectivamente paralelas a las rectas a_2 y b_2, que se cortan y pertenecen al plano p_2: $a_1 \parallel a_2$ y $b_1 \parallel b_2$ (fig. 135). Demostremos, utilizando «el método a la inversa», que los planos p_1 y p_2 no se cortan.

Supongamos que p_1 y p_2 se cortan y $p_1 \cap p_2 = l$. Del criterio de paralelismo de una recta y de un plano se deduce, que $a_1 \parallel p_2$, $b_1 \parallel p_2$ y, por lo tanto (véase el teorema 1 del § 47), $a_1 \parallel l$ y $b_1 \parallel l$, lo que es imposible, ya que a_1 y b_1 se intersecan. ■

Problema. Construir el plano que pasa por el punto dado M paralelamente al plano dado p.

△ Tomemos en el plano p dos puntos a_1 y a_2 que se cortan (fig. 136). Trazamos luego, a través del punto M y la recta a_1 el plano p_1, y a través del punto M y la recta a_2, el plano p_2. Tracemos en el plano p_1 a través del punto M la recta b_1 paralelamente a la recta a_1. Análogamente, tracemos en el plano p_2 a través de M la recta $b_2 \parallel a_2$. El plano q, que pasa a través de las rectas que se cortan b_1, b_2, será el buscado. ▲

Teorema 3. *A través de un punto, que no está situado en el plano dado, se puede trazar un solo plano, paralelo al dado.*

□ Ya está demostrado, que a través del punto M, que no está situado en el plano p, se puede trazar el plano $q \parallel p$. Demostremos, utilizando «el método a la inversa», que este plano es el único. Supongamos que a través del punto

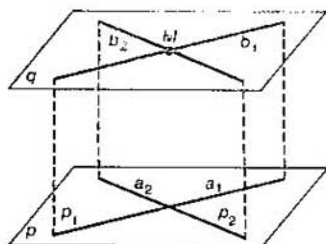


Fig. 136

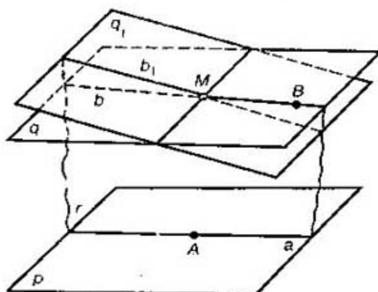


Fig. 137

M pasan dos planos q y q_1, paralelos al plano p (fig. 137). Escojamos en el plano q cierto punto B, que no pertenece al plano q_1. Tracemos el plano r a través de los puntos M, B y de cierto punto $A \in p$. Del teorema 1 se deduce, que la recta $a = p \cap r$ es paralela a la recta $b = q \cap r$, y a la recta $b_1 = q_1 \cap r$, lo que es imposible, ya que las rectas b y b_1 se intersecan en el punto M. ■

§ 49. Angulo entre las rectas en el espacio

Sea que en el espacio están definidas las rectas l y m. Tracemos a través de cierto punto A del espacio las rectas $l_1 \parallel l$ y $m_1 \parallel m$ (fig. 138).

Señalemos que el punto A puede ser elegido arbitrariamente, en particular, puede situarse en una de las rectas dadas. Si las rectas l y m se cortan, se puede tomar por punto A el punto de intersección de estas rectas (entonces, $l_1 = l$ y $m_1 = m$).

Se denomina *ángulo entre las rectas no paralelas* l y m la magnitud del mínimo de los ángulos adyacentes, formados por las rectas que se cortan l_1 y m_1 ($l_1 \parallel l$, $m_1 \parallel m$). Se con-

sidera, que el ángulo entre las rectas paralelas es igual a cero.

El ángulo entre las rectas l y m se denota $(\widehat{l; m})$. De la definición se deduce, que si él se mide en grados, entonces $0° \leqslant (\widehat{l; m}) \leqslant 90°$, y si se mide en radianes, $0 \leqslant \leqslant (\widehat{l; m}) \leqslant \frac{\pi}{2}$.

Problema. Se da el cubo $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (fig. 139). Hállese el ángulo entre las rectas AB y DC_1.

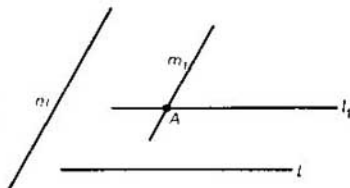


Fig. 138

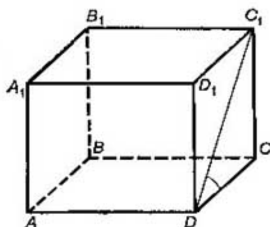


Fig. 139

△ Las rectas AB y DC_1 son cruzadas. Puesto que la recta DC es paralela a la recta AB, de acuerdo con la definición, el ángulo entre las rectas AB y DC_1 es igual a $\widehat{C_1DC}$. Por consiguiente, $(\widehat{AB; DC_1}) = 45°$. ▲

Las rectas l y m se denominan *perpendiculares*, si $(\widehat{l; m}) = \frac{\pi}{2}$. Por ejemplo, en el cubo (véase la figura 139) la recta A_1D_1 es perpendicular a las rectas DC, DC_1, CC_1.

§ 50. Perpendicularidad de la recta y del plano

La recta y el plano se denominan *perpendiculares*, si la recta es perpendicular a cualquier recta perteneciente a este plano (fig. 140).

Si la recta l es perpendicular al plano p, se escribe $l \perp p$.

Es evidente, que si una recta es perpendicular al plano, ella corta este plano. En efecto, si l no corta p, $l \parallel p$. Entonces, en p hay una recta $l' \parallel l$, lo que contradice a que $l \perp p$.

Problema 1. Demuéstrese que por el punto dado M se puede trazar una sola recta que sea perpendicular al plano p.

△ Sea que por el punto M pasan dos rectas distintas l_1 y l_2 que son perpendiculares al plano p (fig. 141). Tracemos a través de las rectas intersecadas l_1 y l_2 el plano q y examinemos la recta $m = p \cap q$. Obtendremos, que en el plano q están trazadas dos perpendiculares a la recta m a través del punto M, lo que es imposible. Por consiguiente, nuestra suposición no es válida. ▲

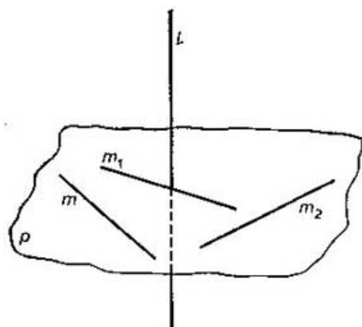


Fig. 140

Demostremos, ahora, el criterio de perpendicularidad de la recta y del plano.

Teorema. *Si la recta es perpendicular a dos rectas intersecadas pertenecientes a un plano, esta recta es perpendicular al plano.*

□ Sea que la recta NM es perpendicular a dos rectas intersecadas l_1 y l_2 del plano p (fig. 142). Se requiere de-

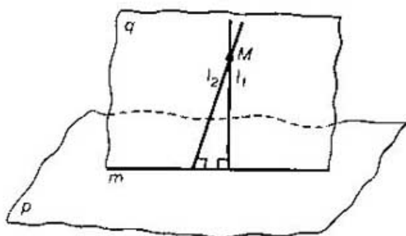


Fig. 141

mostrar que la recta NM es perpendicular al plano p, es decir, es perpendicular a toda recta $l \subset p$.

Tracemos a través del punto $N \in p$ las rectas l_1', l_2' y l' de manera que $l_1' \parallel l_1$, $l_2' \parallel l_2$ y $l' \parallel l$ (fig. 143). Evidentemente, es suficiente demostrar que la recta NM es perpendicular a la recta l', si ella es perpendicular a las rectas l_2' y l_1'.

Tomemos en las rectas l_1' y l_2' por distintos lados del punto N cuatro puntos A, B, C, D de manera que

$$|AN| = |BN| = |CN| = |DN|.$$

El cuadrilátero $ABCD$ será un rectángulo, además, $|AD| = |BC|$. Luego, puesto que la recta NM es per-

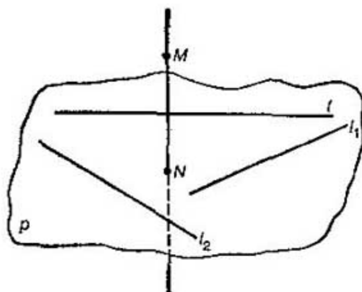


Fig. 142

pendicular a las rectas AC y BD, entonces $|MA| = |MC| = |MB| = |MD|$ (fig. 144). De aquí se deduce

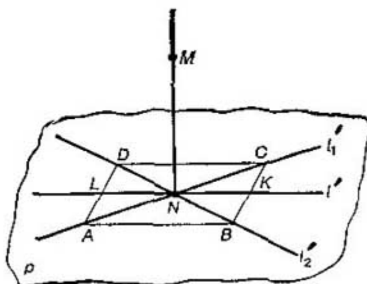


Fig. 143

que los triángulos ADM y BCM son congruentes (por tres lados). El punto N es el centro de simetría del rectángulo $ABCD$, y, por lo tanto, $|LN| = |NK|$ y $|LD| = |BK|$. De la congruencia de los triángulos MLD y MBK

se deduce que $|ML| = |MK|$. Así pues, el triángulo MLK es isósceles, y $|MN|$ es su mediana. Por consiguiente, la recta NM es perpendicular a la recta KL. ■

Problema 2. Se da el cubo $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (fig. 145). Demuéstrese que la recta AC es perpendicular al plano de la sección BDD_1B_1.

△ Puesto que $ABCD$ es un cuadrado, $(AC) \perp (BD)$. Como $ABCDA_1B_1C_1D_1$ es un cubo, la recta D_1D es perpendicular

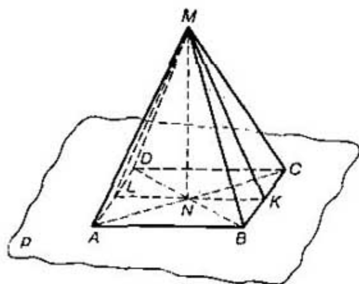


Fig. 144

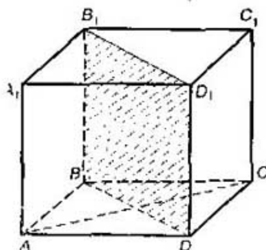


Fig. 145

al plano de la base $ABCD$ y, por consiguiente, $(D_1D) \perp (AC)$. Las rectas D_1D y BD se intersecan y pertenecen al plano de la sección BDD_1B_1. Según el criterio de perpendicularidad de la recta y del plano, la recta AC es perpendicular al plano BDD_1B_1. ▲

§ 51. Teorema de las tres perpendiculares

Sea que del punto M que no está situado en el plano p, está trazada la recta MN perpendicular al plano p, y cierta recta MK que corta el plano p, pero no es perpendicular a él (fig. 146). La longitud del segmento MN se denomina *longitud de la perpendicular* al plano p, que pasa por el punto M.

La recta MK se denomina *oblicua* al plano p, y la recta NK, donde $N \in p$ y $K \in p$, se denomina *proyección* de esta oblicua sobre el plano p. La longitud del segmento MK se denomina *longitud de la oblicua* al plano p, y la longitud del segmento NK, *longitud de la proyección* de esta oblicua. El

punto de intersección de la perpendicular MN con el plano p se denomina *base de la perpendicular*, y el punto de intersección del plano p con la oblicua, *base de la oblicua.*

Tienen lugar las siguientes propiedades:

1) la longitud de la perpendicular MN (fig. 147) al plano p es menor que la longitud de cualquier oblicua MK al plano p;

2) las longitudes de las oblicuas MK y MK_1 al plano p son iguales cuando, y sólo cuando son iguales las longitudes de sus proyecciones sobre este plano;

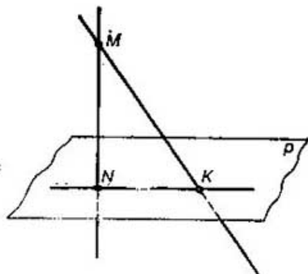


Fig. 146

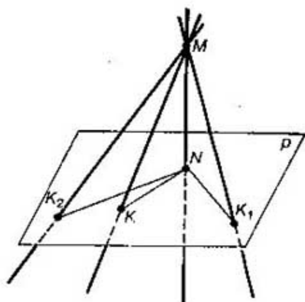


Fig. 147

3) la longitud de la oblicua MK es menor que la longitud de la oblicua MK_2 al plano p cuando, y sólo cuando la longitud de la proyección de la oblicua MK sobre el plano p es menor que la longitud de la proyección de la oblicua MK_2.

□ La propiedad 1) se deduce de que en el triángulo rectangular la longitud de la hipotenusa es mayor que la longitud de cualquier cateto.

La propiedad 2) se deduce de los criterios de igualdad de los triángulos rectangulares. De hecho, si $|MK| = |MK_1|$, entonces $\Delta MNK \cong \Delta MNK_1$, y, por lo tanto, $|NK| = |NK_1|$. Análogamente, si $|NK| = |NK_1|$, $\Delta MNK \cong \Delta MNK_1$ y $|MK| = |MK_1|$.

La propiedad 3) se deduce del teorema de Pitágoras. En efecto,

$$|MK|^2 = |MN|^2 + |NK|^2,$$
$$|MK_2|^2 = |MN|^2 + |NK_2|^2,$$

y, por lo tanto, $|MK| < |MK_2|$ cuando, y sólo cuando $|NK| < |NK_2|$. ■

La propiedad 1) de la oblicua y de la perpendicular al plano hace natural la siguiente definición de la distancia de un punto al plano.

Para cualquier punto M que no esté situado en el plano p, la longitud del segmento MN de la perpendicular al plano p, $N \in p$, que pasa por el punto M se denomina *distancia del punto M al plano p*. La distancia del punto $M \in p$ al plano p se considera igual a cero.

Problema 1. Los catetos del triángulo rectangular ABC ($\hat{C} = 90°$) son iguales a 4 cm y 3 cm. El punto M se encuentra a la distancia de $\sqrt{6}$ cm del plano del triángulo ABC y a la misma distancia de todos sus vértices. Hállese la distancia del punto M a los vértices del triángulo.

△ La distancia del punto M al plano del triángulo ABC es la longitud de la perpendicular trazada por el punto M a este plano, y las distancias del punto M a los vértices, son las longitudes de las respectivas oblicuas (fig. 148). Puesto que $|MA| = |MB| = |MC|$, las longitudes de las proyecciones de estas oblicuas también son iguales. Por lo tanto, la base de la perpendicular MN es el punto medio de la hipotenusa del triángulo ABC. Del $\triangle ABC$ tenemos $|AB| = \sqrt{16 + 9} = 5$ (cm). Del $\triangle MNA$ tenemos $|MA| = \sqrt{6{,}25 + 6} = 3{,}5$ (cm). ▲

Teorema. *Para que la recta $l \subset p$ sea perpendicular a la oblicua al plano p, es necesario y suficiente que la recta l sea perpendicular a la proyección de la oblicua (en el plano p).*

Este teorema se denomina *teorema de las tres perpendiculares*.

□ Sea que $(MN) \perp p$, (MK) es una oblicua, (NK) es una proyección sobre el plano p (fig. 149). Demostremos primeramente la siguiente afirmación (suficiencia): si $l \perp (NK)$, $l \perp (MK)$.

Puesto que $l \perp (MN)$ y $l \perp (NK)$, en virtud del criterio de perpendicularidad de la recta y del plano, la recta l es perpendicular al plano MNK, y, por lo tanto, $l \perp (MK)$ (en la fig. 146 $l \parallel l_1$).

Demostremos, ahora, la afirmación recíproca (necesidad): si $l \perp (MK)$, $l \perp (NK)$.

Como $l \perp (MN)$ y $l \perp (MK)$, la recta l es perpendicular al plano MNK y, por consiguiente, $l \perp (NK)$. ■

Problema 2. Demuéstrese que la magnitud del ángulo entre la oblicua MK al plano p y la recta AK que está situada en el plano p y que pasa por el pie de la oblicua será

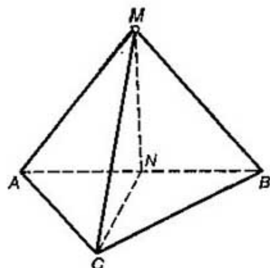


Fig. 148

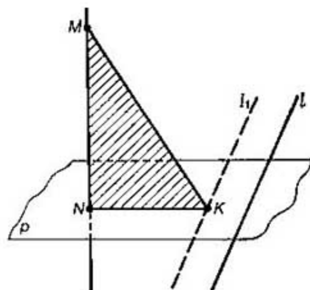


Fig. 149

la mínima, si (AK) es la proyección de la oblicua MK sobre el plano p.

△ Sea que N es la base de la perpendicular MN al plano p. Tracemos del punto N en el plano p la perpendicular NB

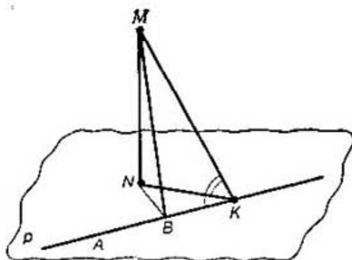


Fig. 150

(fig. 150) a la recta AK. Del teorema de las tres perpendiculares se deduce que $(MB) \perp (AK)$. De los triángulos rectangulares MNK, MNB y MBK obtenemos sen $\widehat{MKN} =$

$= \frac{|MN|}{|MK|} < \frac{|MB|}{|MK|} =$ sen $\widehat{MKB}$, y, por lo tanto, $\widehat{MKN} < \widehat{MKB}$, lo que se requiería demostrar. ▲

El ángulo entre la oblicua l al plano p y su proyección sobre este plano se denomina *ángulo entre la recta l y el plano p* y se designa $(\widehat{l; p})$. Si l es la oblicua a p, de acuerdo

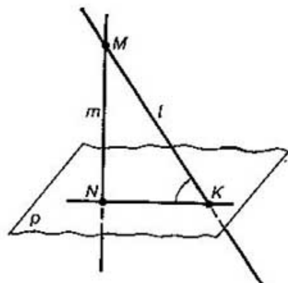


Fig. 151

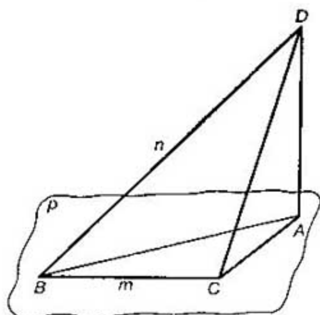


Fig. 152

con la definición $0 < (\widehat{l; p}) < \frac{\pi}{2}$. Se considera que $(\widehat{l; p}) = 0$, si $l \parallel p$ y $(\widehat{l; p}) = \frac{\pi}{2}$, si $l \perp p$.

Así pues, el ángulo entre la recta l y el plano p está definido en todos los casos. Además, siempre $0 \leqslant (\widehat{l; p}) \leqslant \frac{\pi}{2}$, si el ángulo se mide en radianes y $0° \leqslant (\widehat{l; p}) \leqslant 90°$, si el ángulo se mide en grados.

En la figura 151 se ve que si $l = (MK)$ es una oblicua al plano p, y $m = (MN)$ es una perpendicular a p, $(\widehat{l; p}) = \frac{\pi}{2} - (\widehat{l; m})$.

Es fácil ver que esta fórmula es válida también en otros casos, es decir, cuando $l \parallel p$ o $l \perp p$.

Problema 3. Del vértice A del triángulo rectangular ABC $(\hat{C} = 90°)$ está trazada la perpendicular AD a su

plano. Hállese la distancia del punto D al cateto BC, si $|BC| = m$, $|DB| = n$.

△ Puesto que $(AD) \perp p$, (DC) es una oblicua (fig. 152) y (AC) es la proyección de esta oblicua sobre el plano p. Según el teorema de las tres perpendiculares $(DC) \perp (BC)$, ya que $(BC) \perp (AC)$ según la condición. Del triángulo rectangular BCD hallamos: $|CD| = \sqrt{n^2 - m^2}$. Esto es la distancia del punto D al cateto BC. ▲

§ 52. Angulos diedros

Recordemos, que cualquier recta l en un plano divide el conjunto de todos los puntos del plano, que no pertenecen a esta recta, en dos conjuntos, de manera que si los puntos M y N pertenecen a distintos conjuntos, el segmento MN se corta con la recta l, y, si los puntos M y N pertenecen a uno de los conjuntos, entonces el segmento MN no se interseca con la recta l. Estos conjuntos se denominan *semiplanos abiertos* con la frontera l. La unión del semiplano abierto con su frontera se denomina *semiplano* con la frontera l.

Recordemos también que se denomina ángulo (en el plano) la figura constituida por dos rayos con un origen común y limitada por una parte del plano por ellos.

Dos rayos con un origen común limitan dos ángulos con lados comunes. Si los lados del ángulo forman una recta, tal ángulo se denomina *llano*.

Examinemos en el espacio la figura Γ formada por dos semiplanos diferentes α y β con una misma frontera l (fig. 153). Esta figura divide el conjunto de los puntos del espacio que no le pertenecen en dos partes, H_1 y H_2, para las cuales ella es frontera común. Cada una de las figuras $\Phi = H_1 \cup \Gamma$ y $\Phi = H_2 \cup \Gamma$ se denomina *ángulo diedro* con la arista l y las caras α y β.

Todos los puntos de un ángulo diedro, no pertenecientes a las caras, forman su región interior. El ángulo diedro se denomina *llano*, si sus caras forman un solo plano.

Designemos el ángulo diedro con el signo $\angle$ y con las letras que indican sus caras y arista. La letra que designa la arista del ángulo diedro se pone entre las letras que señalan sus caras, por ejemplo: $\angle \alpha l \beta$. A veces, el ángulo diedro se denota brevemente, poniendo solamente la denominación de la arista, por ejemplo: $\angle l$.

Se da el ángulo diedro $\alpha l\beta$. Tracemos a través de un punto arbitrario O de la arista de este ángulo diedro el plano p



Fig. 153

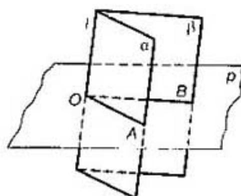


Fig. 154

perpendicular a la arista l (fig. 154). Obtendremos el ángulo AOB

$$\angle AOB = p \cap \angle \alpha l\beta.$$

Señalemos, que la magnitud de este ángulo no depende de la posición del punto O en la arista l. De hecho, si en la arista l escogemos otro punto O_1 y trazamos otro plano p_1 perpendicular a la arista l, la magnitud del ángulo $A_1O_1B_1$ será igual a la magnitud del ángulo AOB (fig. 155), ya que éstos son ángulos con lados codirigidos.

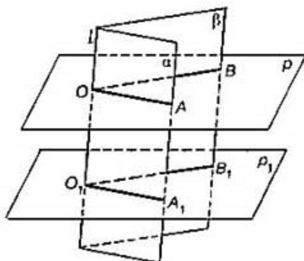


Fig. 155

El ángulo, que es la intersección del ángulo diedro por un plano perpendicular a su arista, se denomina *ángulo lineal* del ángulo diedro. De la definición se deduce, que los lados del ángulo lineal son perpendiculares a la arista del ángulo diedro.

Se denomina *magnitud* del ángulo diedro la magnitud de su ángulo lineal. La magnitud del ángulo diedro $\alpha l\beta$ se designa con $\widehat{\alpha l\beta}$ por ejemplo, $\widehat{\alpha l\beta} = 30°$, $\widehat{\alpha l\beta} = 45°$, etc.

El ángulo diedro se denomina *agudo*, *recto* u *obtuso* en función de que su ángulo lineal sea agudo, recto u obtuso.

Es de señalar, que cualesquiera dos planos p y q que se cortan dividen el conjunto de todos los puntos del espacio, no pertenecientes a estos planos, en cuatro conjuntos que no se intersecan. Cada una de estas partes se encuentra dentro del ángulo diedro respectivo. La magnitud del menor de estos cuatro ángulos diedros se denomina *ángulo entre los planos intersecados dados* p, q y se designa con $\widehat{(p;\ q)}$. El ángulo entre dos planos paralelos se considera igual a 0°.

De la definición se deduce que

$$0' \leqslant \widehat{(p;\ q)} \leqslant 90°.$$

§ 53. Planos perpendiculares

Dos planos se denominan *perpendiculares*, si el ángulo entre estos planos es recto. Si los planos p y q son perpendiculares, se escribe $p \perp q$.

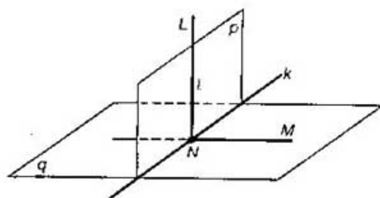


Fig. 156

Demostremos el siguiente criterio de perpendicularidad de los planos.

Teorema. *Si un plano pasa a través de una perpendicular a otro plano, estos planos son perpendiculares.*

□ Sea que la recta l está situada en el plano p y es perpendicular al plano q. Demostremos que $p \perp q$ (fig. 156).

Tracemos a través del punto $N = l \cap q$ en el plano q la recta NM perpendicular a la recta $k = p \cap q$. Entonces, $\angle LNM$ será el ángulo lineal del ángulo diedro formado por los planos p y q. Puesto que $l \perp q$, este ángulo es recto. Por consiguiente, $p \perp q$. ■

Problema. Se da el cubo $ABCDA_1B_1C_1D_1$ en el cual está construida la sección diagonal BB_1D_1D (véase fig. 145).

Demuéstrese que el plano de la sección diagonal y el plano de la base del cubo son perpendicularies.

△ El plano BB_1D_1D pasa a través de la recta (D_1D) que es perpendicular al plano de la base del cubo; por lo tanto, según el teorema demostrado el plano de la sección diagonal y el plano de la base del cubo son perpendiculares. ▲

§ 54. Proyección ortogonal de las figuras

Examinemos un cierto plano p y el punto M. Se denomina *proyección ortogonal* del punto M sobre el plano p la base M_0 de la perpendicular al plano p trazada a través

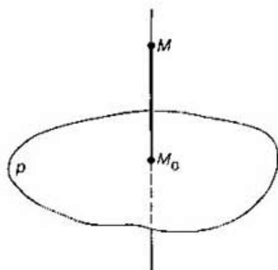


Fig. 157

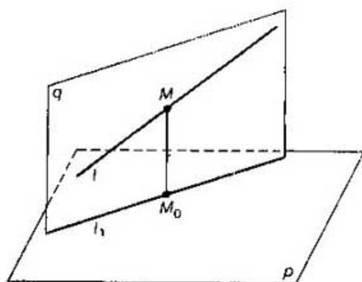


Fig. 158

del punto M (fig. 157). En este caso, el plano p se denomina *plano de proyección*.

Existe una única perpendicular al plano p trazada a través del punto dado. Por lo tanto, para cada punto del espacio existe una única proyección ortogonal M_0 de este punto sobre el plano dado. En particular, si $M \in p$, $M_0 = M$.

En adelante, para ser más breves, hablando sobre proyecciones ortogonales, vamos a usar habitualmente el término «proyección», omitiendo la palabra «ortogonal».

Se denomina *proyección de la recta* l sobre el plano p el conjunto de puntos del plano p que son las proyecciones de los puntos de esta recta.

Examinemos algunas propiedades de las proyecciones de las rectas sobre el plano.

1) Si la recta l no es perpendicular al plano de proyección, su proyección sobre este plano es una recta.

□ Si la recta l está situada en el plano p, esta afirmación es evidente.

Sea que la recta l no está situada en el plano p, y sea que M_0 es la proyección del punto M, que pertenece a l y no pertenece a p, sobre el plano p (fig. 158). Tracemos el plano q a través de las rectas l y M_0M.

Los planos p y q son perpendiculares según el criterio de perpendicularidad de los planos. Por consiguiente, la recta $l_1 = p \cap q$ es la proyección de la recta l sobre el plano p. ■

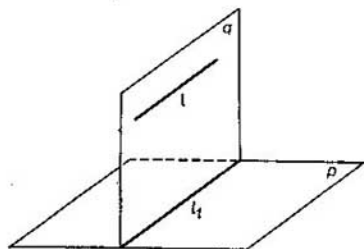


Fig. 159

De aquí se deduce que las proyecciones del rayo y del segmento (que no son perpendiculares al plano p) representan un rayo y un segmento, respectivamente. Si l es una perpendicular a p, entonces, según la definición, la proyección de l sobre p será un punto (el punto de intersección de la recta l y el plano p).

De esta propiedad se deduce, que la definición general de la proyección de una recta sobre el plano no contradice a la definición de la proyección de una oblicua sobre el plano.

2) Si la recta l es paralela al plano de proyección, entonces también es paralela a la recta l_1, que es su proyección.

□ Realmente, al trazar el plano q (fig. 159) a través de las rectas l y l_1, obtendremos $l_1 = q \cap p$. Por consiguiente, $l_1 \parallel l$. ■

De aquí resulta, que la proyección de un segmento, paralelo al plano de proyección, es un segmento congruente al dado.

3) La proyección de dos rectas paralelas, que no son perpendiculares al plano de proyección, son las rectas paralelas.

□ Sea que el plano q pasa a través de la recta l y de su proyección l', y q_1, a través de la recta l_1 y de su proyección l_1' (fig. 160). Los planos q y q_1 son paralelos, ya que son perpendiculares al plano p y pasan a través de las rectas paralelas l y l_1. Pero entonces, también $l' \parallel l_1'$ como rectas de intersección de los planos paralelos q, q_1 por el plano p. ■

De aquí se deduce que las proyecciones de las rectas intersecadas (que no están situadas en un plano perpendicular al plano p) se cortan.

4) La razón de las longitudes de las proyecciones de dos segmentos paralelos, que no son perpendiculares al plano de proyección, sobre un plano dado, es igual a la razón de las longitudes de los segmentos a proyectar.

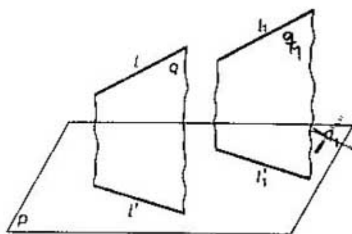


Fig. 160

□ En vez de los segmentos dados pueden ser examinados los segmentos congruentes a ellos, situados en una misma recta. Como la recta y su proyección pertenecen al mismo plano, la afirmación a demostrar se deduce del teorema sobre los segmentos proporcionales en el plano. ■

Se denomina *proyección de la figura F* sobre el plano p el conjunto de puntos, que son proyecciones de los puntos de la figura F sobre este plano.

Problema 1. Represéntese la proyección del triángulo ABC sobre el plano dado p.

△ Si el plano del $\triangle ABC$ (p_1) no es perpendicular al plano p, la proyección del triángulo ABC sobre este plano será cierto triángulo $A_1B_1C_1$ (la proyección del segmento es un segmento) (fig. 161).

Si $p_1 \perp p$, la proyección del triángulo dado ABC sobre el plano p será el segmento A_1C_1 (fig. 162).

Si $p_1 \parallel p$, la proyección del $\triangle ABC$ sobre el plano p será $\triangle A_1B_1C_1 \cong \triangle ABC$ ▲.

Problema 2. Una de las diagonales del rombo $ABCD$ es perpendicular al plano dado p. ¿Cuál es la proyección de dicho rombo sobre este plano?

△ Sea que $[BD] \perp p$ (fig. 163).

Entonces, el plano del rombo $ABCD$ (p_1) es perpendicular al plano p, y la proyección $[A_1C_1]$ de la diagonal AC pertenecerá a $l = p_1 \cap p$.

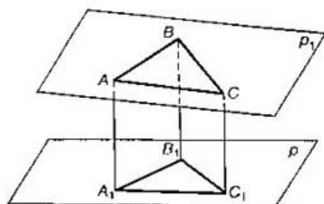


Fig. 161

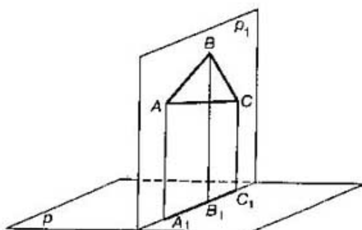


Fig. 162

Según la propiedad del rombo $[AC] \perp [BD]$, de acuerdo con la condición $(BD) \perp p$; según la definición de la recta, perpendicular al plano, $(BD) \perp l$. Entonces, los puntos B,

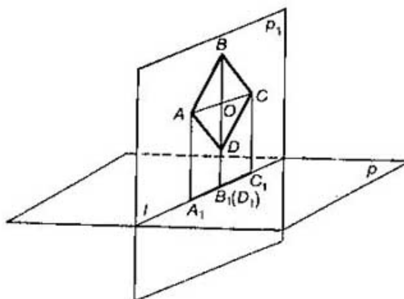


Fig. 163

D y el punto O de intersección de las diagonales se proyectan en el punto B_1 (D_1) del segmento A_1C_1. Por lo tanto, la proyección del rombo $ABCD$ sobre el plano p es el segmento A_1C_1. ▲

§ 55. Area de la proyección de un polígono

Recordemos, que se denomina ángulo entre la recta y el plano el ángulo entre la recta dada y su proyección en el plano (fig. 164).

Teorema. *El área de la proyección ortogonal de un polígono sobre el plano es igual al área del polígono a proyectar, multiplicado por el coseno del ángulo, formado por el plano del polígono y el plano de la proyección.*

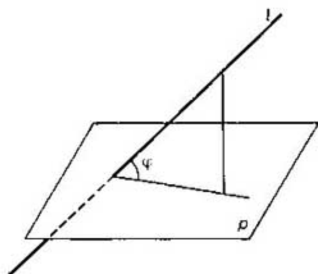


Fig. 164

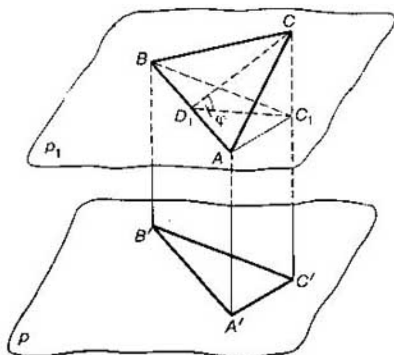


Fig. 165

□ Todo polígono puede ser dividido en triángulos, cuya suma de las áreas es igual al área del polígono. Por lo tanto, es suficiente demostrar el teorema para el triángulo.

Sea que $\triangle ABC$ se proyecta sobre el plano p. Examinemos dos casos: a) uno de los lados del $\triangle ABC$ es paralelo al plano p; b) ninguno de los lados del $\triangle ABC$ es paralelo a p.

Examinemos **el primer caso**: sea que $[AB] \parallel p$.

Tracemos a través de (AB) el plano $p_1 \parallel p$ y proyectemos ortogonalmente $\triangle ABC$ sobre p_1 y sobre p (fig. 165); obtendremos $\triangle ABC_1$ y $\triangle A'B'C'$. Según la propiedad de la proyección tenemos que $\triangle ABC_1 \cong \triangle A'B'C'$ y, por lo tanto

$$S_{\triangle ABC_1} = S_{\triangle A'B'C'}.$$

Tracemos $[CD_1] \perp [AB]$ y el segmento D_1C_1. Entonces, $[D_1C_1] \perp [AB]$ y $\widehat{CD_1C_1} = \varphi$ es la magnitud del ángulo entre

el plano del $\triangle ABC$ y el plano p_1. Por lo tanto,

$$S_{\triangle ABC_1} = \frac{1}{2} |AB| \cdot |C_1D_1| = \frac{1}{2} |AB| \cdot |CD_1| \cdot \cos\varphi =$$
$$= S_{\triangle ABC} \cos\varphi,$$

y, por consiguiente, $S_{\triangle A'B'C'} = S_{\triangle ABC} \cos\varphi$.

Estudiemos el segundo caso. Tracemos el plano $p_1 \parallel p$ por aquel vértice del $\triangle ABC$, cuya distancia al plano p es la mínima (supongamos que es el vértice A). Proyectemos

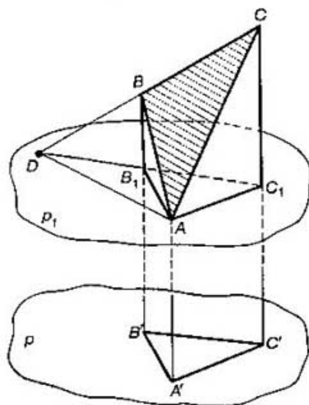


Fig. 166

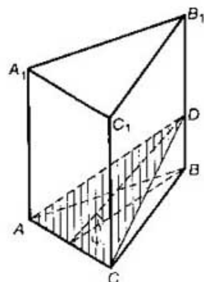


Fig. 167

el $\triangle ABC$ sobre los planos p_1 y p (fig. 166); sean sus proyecciones respectivamente $\triangle AB_1C_1$ y $\triangle A'B'C'$. Sea que $(BC) \cap p_1 = D$. Entonces

$$R_{\triangle A'B'C'} = S_{\triangle AB_1C_1} = S_{\triangle ADC_1} - S_{\triangle ADB_1} =$$
$$= (S_{\triangle ADC} - S_{\triangle ADB}) \cos\varphi = S_{\triangle ABC} \cos\varphi. \blacksquare$$

Problema. Por el lado de la base de un prisma triangular regular está trazado un plano bajo el ángulo $\varphi = 30°$ respecto al plano de su base. Hállese el área de la sección formada, si el lado de la base del prisma $a = 6$ cm.

△ Ilustremos la sección del prisma dado (fig. 167). Puesto que el prisma es regular, sus aristas laterales son perpendiculares al plano de la base. Esto quiere decir, que

$\triangle ABC$ es la proyección del $\triangle ADC$, por lo tanto

$$S_{\triangle ADC} = \frac{S_{\triangle ABC}}{\cos\varphi} = \frac{a \cdot a\sqrt{3}}{4\cos\varphi}$$

ó

$$S_{\triangle ADC} = \frac{6 \cdot 6 \cdot \sqrt{3}}{4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = 18\ (\text{cm}^2). \blacktriangle$$

§ 56. Angulos triedros y poliedros

Sean dados el $\triangle ABC$ y el punto S, que no pertenece al plano del triángulo (fig. 168). Se denomina *ángulo triedro* la agrupación de todos los rayos, que tienen un origen común en el punto S y cortan el triángulo dado (fig. 169). El

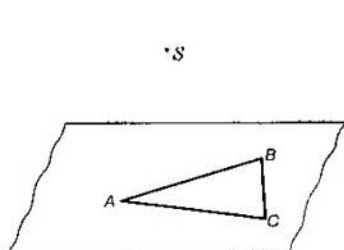


Fig. 168

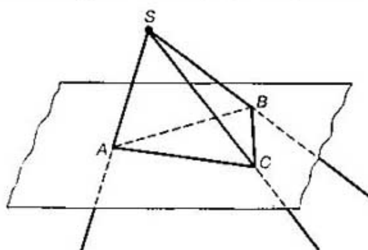


Fig. 169

punto S se denomina *vértice* del ángulo triedro, y los rayos SA, SB, SC, sus *aristas*. Los ángulos ASB, BSC, CSA se denominan *caras* del ángulo triedro o sus *ángulos planos*. La magnitud de cada uno de ellos pertenece al intervalo $]0°; 180°[$.

En general, si se dan el polígono $ABC \ldots N$ y el punto S, que no pertenece al plano del polígono, entonces la unión de todos los rayos que tienen su origen común en el punto S y cortan el polígono dado (fig. 170), se denomina *ángulo poliedro*. El punto S se denomina *vértice* del ángulo poliedro, los rayos SA, SB, $\ldots$, SN, sus *aristas*. Los ángulos ASB, BSC, $\ldots$, se denominan *caras* del ángulo poliedro o sus

ángulos planos; la magnitud de cada uno de sus ángulos planos pertenece al intervalo]0°; 180°[. Los ángulos poliedros se denominan *triedros*, *tetraedros*, etc, en función del número de caras. El ángulo poliedro se designa bien con una letra, que denota el vértice, o bien con varias letras que señalan el vértice y los puntos en cada arista.

El ángulo poliedro se denomina *convexo*, si se encuentra por un lado del plano de cada una de sus caras. De lo contrario, el ángulo poliedro se denomina *no convexo*. En la figura 171 está presentado un ángulo pentaedro no convexo.

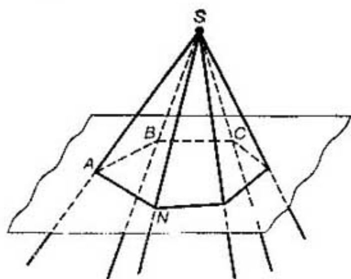


Fig. 170

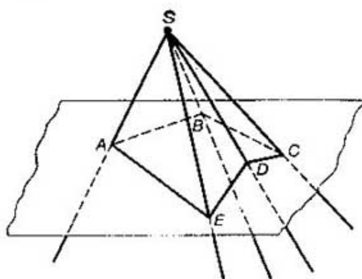


Fig. 171

El ángulo poliedro convexo se denomina *regular*, si todas sus caras y todos sus ángulos diedros son congruentes.

Examinemos las propiedades de los ángulos triedros y poliedros planos.

Teorema 1. *La magnitud de cada ángulo plano de un ángulo triedro es menor que la suma de las magnitudes de sus otros dos ángulos planos.*

□ Sea que se da el ángulo de tres caras $SABC$. Designemos con α, β, γ (fig. 172) las magnitudes de sus ángulos planos. Sea que γ es la máxima. Es suficiente demostrar que $\gamma < \alpha + \beta$.

Tracemos en el plano de la cara ASB el rayo SM de manera que $\widehat{ASM} = \widehat{ASC} = \beta$. Sea que N es el punto de intersección del segmento AB y el rayo SM. Tracemos en el rayo SC tal segmento SD, que $|SD| = |SN|$. Entonces, $\Delta ASD \cong \triangle ASN$ por dos lados y por el ángulo entre ellos.

En el $\triangle ADB$

$$|AD| + |DB| > |AB|,$$

y según la construcción

$$|AB| = |AN| + |NB| \quad \text{y} \quad |AD| = |AN|.$$

Por consiguiente, $|DB| > |NB|$.

Expresemos, ahora, $|DB|$ y $|BN|$ de los triángulos BSD y BSN, aplicando el teorema del coseno:

$$|BD|^2 = |BS|^2 + |DS|^2 - 2|BS| \cdot |DS| \cdot \cos\alpha,$$

$$|BN|^2 = |BS|^2 + |NS|^2 - 2|BS| \cdot \cos \widehat{NSB}.$$

Puesto que $|DS| = |NS|$ y $|DB| > |NB|$, $\cos\alpha <$ $< \cos \widehat{NSB}$, y, por lo tanto, $\widehat{NSB} < \alpha$. Entonces,

$$\widehat{ASN} + \widehat{NSB} < \alpha + \beta \quad \text{ó} \quad \gamma < \alpha + \beta. \blacksquare$$

Del teorema demostrado se deduce directamente, que la magnitud de cada ángulo plano de un ángulo triedro es mayor

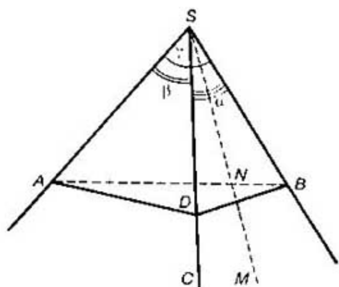


Fig. 172

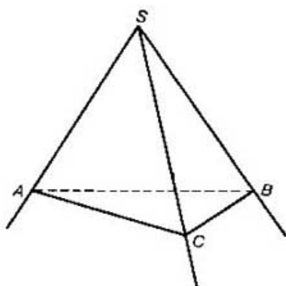


Fig. 173

que la diferencia de las magnitudes de sus otros dos ángulos planos, por ejemplo, $\alpha > \gamma - \beta$, $\beta > \gamma - \alpha$.

Teorema 2. *La suma de las magnitudes de todos los tres ángulos planos de un ángulo triedro es menor de 360°.*

□ Sea que se da el ángulo triedro $SABC$ (fig. 173). Si a través de los puntos A, B, C se traza un plano, obtendremos otros tres ángulos triedros: $ASBC$, $BSAC$ y $CSAB$.

Apliquemos a cada uno de ellos el teorema de la suma de las magnitudes de dos ángulos planos del ángulo triedro:

$$\widehat{SAB}+\widehat{SAC}>\widehat{BAC},\quad \widehat{SBC}+\widehat{SBA}>\widehat{ABC},$$
$$\widehat{SCA}+\widehat{SCB}>\widehat{ACB}.$$

Sumando término a término estas desigualdades, obtendremos

$$\widehat{SAB}+\widehat{SAC}+\widehat{SBC}+\widehat{SBA}+\widehat{SCA}+\widehat{SCB}>$$
$$>\widehat{BAC}+\widehat{ABC}+\widehat{ACB},$$

y puesto que la suma de las magnitudes de los ángulos interiores del triángulo es igual a 180°, entonces

$$(\widehat{SAC}+\widehat{SCA})+(\widehat{SCB}+\widehat{SBC})+(\widehat{SAB}+\widehat{SBA})>180^\circ. \quad (1)$$

Designemos $\widehat{ASC}=\alpha$, $\widehat{BSC}=\beta$, $\widehat{ASB}=\gamma$, entonces de los triángulos ASC, ASB, BSC tenemos

$$\widehat{SCA}+\widehat{SAC}=180^\circ-\alpha,$$
$$\widehat{SCB}+\widehat{SBC}=180^\circ-\beta,$$
$$\widehat{SAB}+\widehat{SBA}=180^\circ-\gamma.$$

Ahora, la desigualdad (1) toma la forma

$$180^\circ-\alpha+180^\circ-\beta+180^\circ-\gamma>180^\circ,$$

de donde resulta que

$$\alpha+\beta+\gamma<360^\circ. \quad \blacksquare$$

Dividiendo el ángulo poliedro convexo en ángulos triedros, se puede demostrar la siguiente afirmación.

La suma de las magnitudes de todos los ángulos planos del ángulo poliedro convexo es menor de 360°, *y cada ángulo plano es menor que la suma de los demás ángulos planos.*

§ 57. Prisma

Si a través de cada punto de una línea quebrada plana se trazan rectas, que sean paralelas a la dirección dada, la cual no es paralela al plano de la línea quebrada, obtenedremos *una superficie prismática infinita* (fig. 174).

Si a través de cada punto de un polígono se trazan rectas que sean paralelas a la dirección dada, la cual no es paralela al plano del polígono, obtendremos *un prisma infinito*.

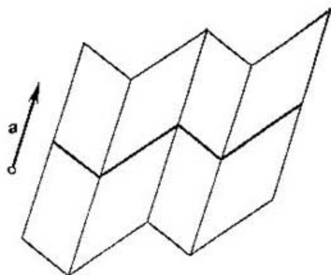


Fig. 174

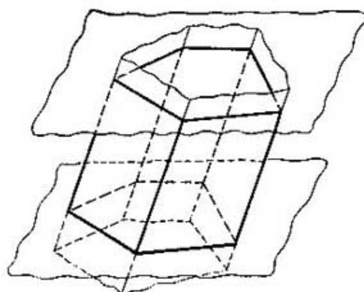


Fig. 175

Dos planos paralelos cualesquiera, que no son paralelos a la dirección elegida, cortan de ella un polígono denominado *prisma* (fig. 175). Las partes de los planos paralelos, cortados por una superficie prismática, se denominan *bases del prisma*.

Las caras laterales del prisma representan paralelogramos, y su unión constituye *la superficie lateral* del prisma. Los lados comunes de los paralelogramos se denominan *aristas laterales* del prisma, y los lados de la base se denominan a veces *aristas de la base*.

Los prismas se denominan *triangulares*, *cuadrangulares*, *pentagonales*, *n-angulares* en función del número de vértices del polígono que forma la base (fig. 176). El segmento que une dos vértices del prisma, no situados en una misma cara, se denomina *diagonal* del prisma. Es evidente, que el prisma triangular no tiene diagonales. Aplicando el método de inducción matemática se puede demostrar, que el número de diagonales del prisma n-angular es igual a $n(n-3)$. Por ejemplo, el prisma cuadrangular tiene $4\cdot(4-3)=4$

(fig. 177), en tanto que el pentagonal, $5 \cdot (5 - 3) = 10$, diagonales. El plano que pasa por dos aristas laterales del prisma, no situadas en una misma cara, se denomina *plano*

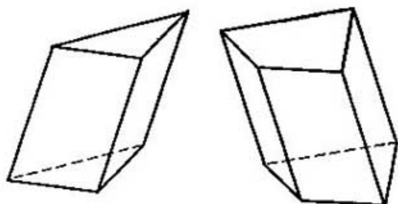


Fig. 176

diagonal (fig. 178). El segmento de una perpendicular, trazado de un punto cualquiera de la base superior al plano de la base inferior, se denomina *altura del prisma*. El prisma, cuyas aristas laterales son perpendiculares a los

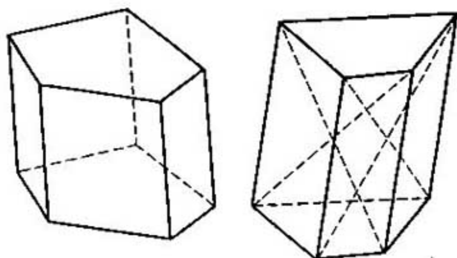


Fig. 177

planos de las bases, se denomina *recto* (fig. 179). Si las aristas laterales del prisma no son perpendiculares a los planos de las bases, el prisma se denomina *oblicuo*. El prisma recto, que tiene por base un polígono regular, se denomina *regular*.

Se denomina *sección perpendicular* del prisma (fig. 180), la proyección de las bases de éste sobre el plano perpendicular a las aristas del prisma. Es evidente, que la sección perpendicular del prisma es un polígono, que se obtiene en la sección

del prisma infinito correspondiente, por un plano perpendicular a las aristas del prisma.

Teorema. *El área de la superficie lateral del prisma es igual al producto del perímetro de la sección perpendicular*

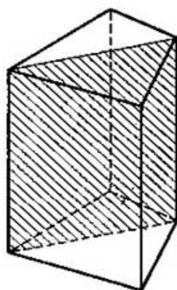


Fig. 178

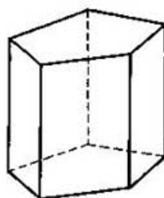


Fig. 179

por la longitud de la arista lateral del prisma, es decir,

$$S_{lat.} = P \cdot l,$$

donde P es el perímetro de la sección perpendicular, y l, la longitud de la arista lateral.

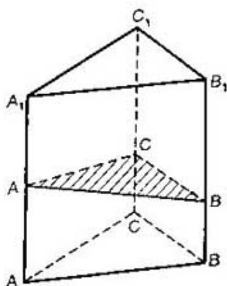


Fig. 180

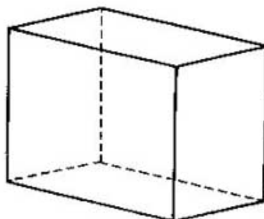


Fig. 181

□ Hagamos la demostración para el prisma triangular (véase fig. 180).

Sea que $A'B'C'$ es una sección perpendicular del prisma dado. Puesto que $(A'B') \perp (BB_1)$, $[A'B']$ es la altura del

paralelogramo ABB_1A_1. Su área es igual a

$$S_{ABB_1A_1} = |A'B'| \cdot l.$$

Análogamente,

$$S_{BCC_1B_1} = |B'C'| \cdot l, \quad S_{ACC_1A_1} = |A'C'| \cdot l.$$

Por consiguiente,

$$S_{\text{lat.}} = (|A'B'| + |B'C'| + |A'C'|) \cdot l = P \cdot l. \blacksquare$$

Se denomina *paralelepípedo* el prisma que tiene por base un paralelogramo. De la definición se deduce, que todas las caras del paralelepípedo son paralelogramos (fig. 181). Para

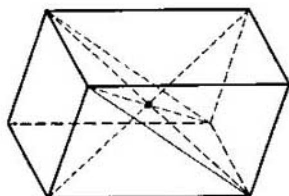


Fig. 182

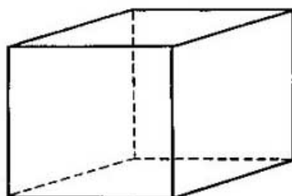


Fig. 183

el paralelepípedo es válido el siguiente teorema: *el punto medio de la diagonal del paralelepípedo es su centro de simetría.* De este teorema se deduce que las caras opuestas del paralelepípedo son congruentes de dos en dos y paralelas, y todas las diagonales del paralelepípedo se intersecan en un punto, que las divide por la mitad (fig. 182).

Se denomina *recto*, el paralelepípedo cuyas aristas laterales son perpendiculares al plano de su base. Las caras laterales del paralelepípedo recto son polígonos (fig. 183). Se denomina *paralelepípedo rectangular*, el paralelepípedo recto, cuyas bases son rectángulos. Todas las caras del paralelepípedo rectangular son rectángulos. Se denomina *cubo*, el paralelepípedo rectangular, cuyas tres aristas procedentes de un mismo vértice son congruentes. Así pues, todas la caras del cubo son cuadrados congruentes.

§ 58. Pirámide y pirámide truncada

El lector ya tiene una idea sobre la pirámide, del curso de geometría del octavo grado. Recordemos, cómo se puede construir una pirámide. Construyamos en el plano p un polígono cualquiera, por ejemplo, el pentágono $ABCDE$. Tomemos el punto S fuera del plano p. Al unir por medio de segmentos el punto S con todos los puntos del polígono, obtendremos la pirámide $SABCDE$ (fig. 184). El punto S se denomina *vértice*, y el polígono $ABCDE$, *base* de esta pirámide. De este modo, la pirámide con el vértice S y la base $ABCDE$ es una unión de todos los segmentos $[SM]$, donde $M \in ABCDE$.

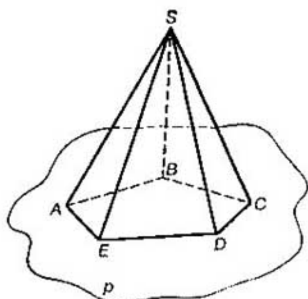


Fig. 184

Los triángulos SAB, SBC, SCD, SDE, SEA se denominan *caras laterales* de la pirámide, los lados comunes de las caras laterales SA, SB, SC, SD, SE se denominan *aristas laterales*.

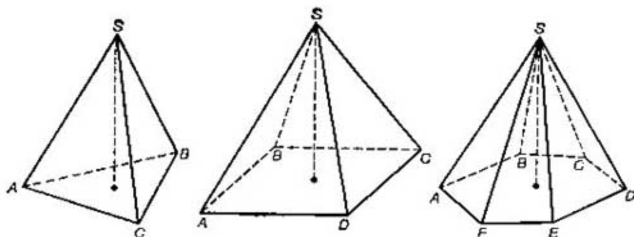


Fig. 185

Las pirámides se denominan *triángulares*, *cuadrangulares*, *n-angulares* en función del número de lados de la base. En la figura 185 están ilustradas las pirámides triangular, cuadrangular, hexagonal.

El plano que pasa a través del vértice de la pirámide y de la diagonal de la base se denomina *diagonal*, y la sección

obtenida, sección *diagonal*. En la figura 186 una de las secciones diagonales de la pirámide hexagonal está rayada.

Se denomina *altura* de la pirámide el segmento de la perpendicular trazado a través del vértice de la pirámide al plano de su base (los extremos de este segmento son el vértice de la pirámide y la base de la perpendicular).

La pirámide se denomina *regular*, si la base de la pirámide es un polígono regular y el vértice de la pirámide se proyecta a su centro.

Todas las caras laterales de la pirámide regular son triángulos isósceles congruentes. Todas las caras laterales de la pirámide regular son congruentes.

La altura de la cara lateral de la pirámide regular trazada de su vértice se denomina *apotema* de una pirámide. Todas las apotemas de la pirámide regular son congruentes.

Si designamos un lado de la base con a, y la apotema, con h, el área de una cara lateral de la pirámide es igual a $\frac{1}{2}ah$.

La suma de las áreas de todas las caras laterales de la pirámide se denomina *área de la superficie lateral* de la pirámide y se designa con S_{lat}.

Puesto que la superficie lateral de la pirámide regular consta de n caras congruentes, entonces

$$S_{lat} = \frac{1}{2}ahn = \frac{Ph}{2},$$

donde P es el perímetro de la base de la pirámide. Por consiguiente,

$$S_{lat} = \frac{Ph}{2},$$

es decir, *el área de la superficie lateral de la pirámide regular es igual a la mitad del producto del perímetro de la base por la apotema.*

El área de la superficie total de la pirámide se calcula según la fórmula

$$S = S_{bas} + S_{lat}.$$

El volumen de la pirámide es igual a un tercio del producto del área de su base S_{bas} por la altura H:

$$V = \frac{1}{3} S_{bas} H.$$

La deducción de esta y de algunas otras fórmulas se dará en uno de los capítulos posteriores.

Construyamos ahora una pirámide, por otro método. Sea dado un ángulo poliedro, por ejemplo, de cinco caras con el vértice S (fig. 187). Tracemos el plano p de manera que interseque todas las aristas del ángulo poliedro dado en distintos puntos A, B, C, D, E (fig. 188). Entonces, la pirámide

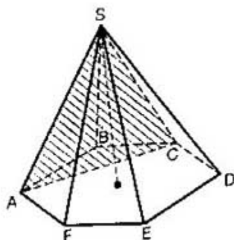


Fig. 186

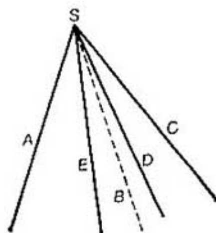


Fig. 187

$SABCDE$ puede ser considerada como la intersección del ángulo poliedro y el semiespacio con la frontera p, que contiene el vértice S.

Es evidente que el número de todas las caras de la pirámide puede ser arbitrario, pero no menor de cuatro. Cuando el ángulo triedro se corta por un plano, obtenemos una pirámide triangular de cuatro caras. Cualquier pirámide triangular se denomina a veces *tetraedro*.

La pirámide truncada puede ser obtenida, si la pirámide se corta por un plano paralelo al plano de la base. En la figura 189 se ofrece una pirámide cuadrangular truncada.

Las pirámides truncadas se denominan también *triangulares*, *cuadrangulares*, *n-angulares* en función del número de los lados de la base. De la construcción de la pirámide truncada se deduce que ella tiene dos bases: *superior* e *inferior*. Las bases de la pirámide truncada representan dos poliedros cuyos lados son paralelos de dos en dos. Las caras laterales de la pirámide truncada representan trapecios.

Se denomina *altura* de la pirámide truncada el segmento de una perpendicular trazado de un punto cualquiera de la base superior al plano de la base inferior.

Se denomina *pirámide truncada regular* la parte de la pirámide regular, comprendida entre la base y el plano de la sección paralelo a la base. La altura de la cara lateral de la pirámide truncada regular (del trapecio) se denomina *apotema*.

Se puede demostrar que las aristas laterales de la pirámide truncada regular son congruentes, así como todas las caras laterales y todas las apotemas.

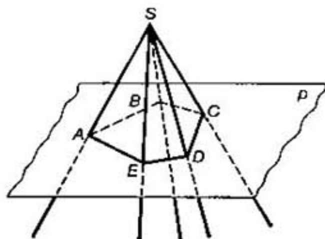


Fig. 188

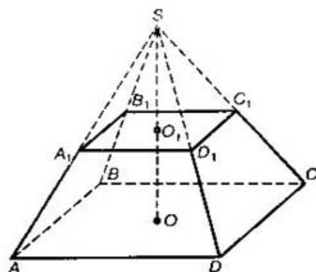


Fig. 189

Si en la pirámide n-angular truncada regular se designan con a y b_n las longitudes de los lados de las bases superior e inferior y con h, la longitud de la apotema, el área de cada cara lateral de la pirámide es igual a

$$\frac{1}{2}(a+b_n)h.$$

La suma de las áreas de todas las caras laterales de la pirámide se denomina *área de su superficie lateral* y se designa con S_{lat}. Es evidente, que para la pirámide n-angular truncada regular

$$S_{\text{lat}}=n\cdot\frac{1}{2}(a+b_n)\,n.$$

Puesto que $na = P$ y $nb_n = P_1$ son los perímetros de las bases de la pirámide truncada,

$$S_{\text{lat}}=\frac{1}{2}(P+P_1)\,h,$$

es decir, *el área de la superficie lateral de la pirámide truncada regular es igual a la mitad del producto de la suma de los perímetros de sus bases por la apotema.*

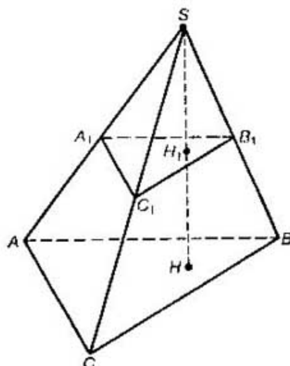


Fig. 190

Teorema. *Si la pirámide se corta con un plano paralelo a la base,*

1) *las aristas laterales y la altura se dividirán en partes proporcionales;*

2) *en la sección se obtendrá un polígono semejante a la base;*

3) *las áreas de la sección y de la base se relacionan como los cuadrados de sus distancias del vértice.*

□ Es suficiente demostrar el teorema para la pirámide triangular.

Puesto que los planos paralelos se cortan por un tercer plano por las rectas paralelas, entonces $(AB) \parallel (A_1B_1)$, $(BC) \parallel (B_1C_1)$, $(AC) \parallel (A_1C_1)$ (fig. 190).

Las rectas paralelas dividen los lados del ángulo en partes proporcionales, y por lo tanto,

$$\frac{|SA|}{|SA_1|} = \frac{|SB|}{|SB_1|} = \frac{|SC|}{|SC_1|};$$

por consiguiente, $\triangle SAB \backsim \triangle SA_1B_1$ y

$$\frac{|AB|}{|A_1B_1|} = \frac{|SB|}{|SB_1|};$$

$\triangle SBC \backsim SB_1C_1$ y

$$\frac{|BC|}{|B_1C_1|} = \frac{|SB|}{|SB_1|} = \frac{|SC|}{|SC_1|}.$$

Así pues,

$$\frac{|AB|}{|A_1B_1|} = \frac{|BC|}{|B_1C_1|} = \frac{|AC|}{|A_1C_1|}.$$

Los respectivos ángulos de los triángulos ABC y $A_1B_1C_1$ son congruentes, como ángulos con lados paralelos e igual-

mente dirigidos. Por lo tanto

$$\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1.$$

Las áreas de los triángulos semejantes se relacionan como los cuadrados de los lados respectivos:

$$\frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = \frac{|AB|^2}{|A_1B_1|^2},$$

pero

$$\frac{|AB|}{|A_1B_1|} = \frac{|SH|}{|SH_1|}.$$

Por consiguiente,

$$\frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = \frac{|SH|^2}{|SH_1|^2}. \quad \blacksquare$$

§ 59 *. Poliedros

La mayoría de los minerales tienen una estructura cristalina en forma de diversos poliedros.

Desde los tiempos más antiguos en la creación técnica del hombre predominan las formas espaciales más sencillas, o sea, los poliedros; sirven de ejemplo las pirámides de Egipto, numerosas torres, edificios y distintas obras de ingeniería.

Demos la definición general del poliedro convexo.

El conjunto de puntos del espacio se denomina *acotado*, si existe tal número M, que $|AB| \leqslant M$ para cualesquiera puntos A y B de este conjunto.

Ejemplos de conjuntos acotados son la esfera, el cilindro, el cono, la pirámide, el prisma; cualquier conjunto de puntos del especio, que es una unión o intersección del número finito de los conjuntos anteriormente citados, también será, evidentemente, un conjunto acotado.

El punto M del espacio se denomina *punto de frontera* del conjunto, si en cualquier esfera con el centro en el punto M se comprenden tanto los puntos pertenecientes a este conjunto, como los no pertenecientes. El conjunto de todos los puntos de frontera del conjunto dado se denomina su *frontera.*

El conjunto se denomina *cerrado*, si contiene todos los puntos de frontera. El conjunto se denomina *abierto*, si no le pertenece ninguno de los puntos de frontera.

Ejemplos de conjuntos cerrados son el semiespacio, el ángulo diedro y la esfera. Las fronteras de estos conjuntos son el plano, la unión de dos semiplanos y la esfera respectivamente.

El conjunto de puntos del espacio se denomina *convexo*, si para dos de sus puntos cualesquiera, el segmento que les une pertenece a esto conjunto.

Ejemplos de conjuntos convexos son la esfera, el cilindro, la pirámide triangular, el semiplano, el ángulo triedro. De ellos la esfera, el cilindro y la pirámide triangular son, además, conjuntos acotados. El semiplano y el ángulo diedro son conjuntos no acotados.

El conjunto abierto, acotado convexo de los puntos del espacio se denomina *poliedro abierto convexo*, si su frontera es una unión de un número finito de los polígonos denominados *caras* del poliedro dado.

La unión del poliedro abierto convexo y de su frontera se denomina poliedro cerrado convexo o simplemente *poliedro convexo*.

La frontera del poliedro se denomina *superficie del poliedro*. El área de la superficie del poliedro es igual a la suma de las áreas de todas sus caras.

§ 60 *. Poliedros regulares

El poliedro convexo se denomina *regular*, si todas sus caras son poliedros regulares congruentes, y todos sus ángulos poliedros son congruentes y regulares.

De la definición se deduce, que todos los ángulos diedros del poliedro regular son congruentes, así como son congruentes todos los ángulos planos y todas sus aristas. Se puede demostrar el teorema:

En cualquier poliedro regular se puede inscribir una esfera y alrededor de cualquier poliedro regular se puede circunscribir una esfera, además, los centros de estas esferas coinciden.

El centro común de las esferas inscrita y circunscrita del poliedro regular se denomina *centro* de este poliedro.

La frontera del poliedro regular es la superficie cerrada, que representa la unión de todas sus caras.

Los poliedros regulares eran conocidos ya en la Grecia Antigua (en el siglo V a.n.e.). Fueron mencionados por primera vez por Platón, desde entonces obtuvieron el título de los cinco cuerpos de Platón. El famoso libro «Principios»

de Euclides comenzaba por la descripción de la construcción del triángulo regular y terminaba con la descripción de los cinco cuerpos poliedros regulares.

Hasta hoy día los poliedros regulares han conservado sus denominaciones griegas.

1. El cubo. Sea que en el sistema rectangular de coordenadas *Oxyz* están definidos por medio de sus ecuaciones seis

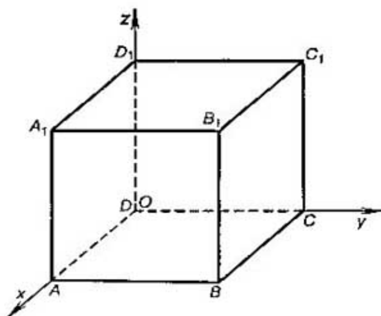


Fig. 191

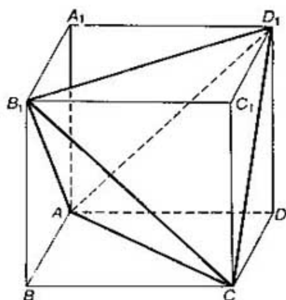


Fig. 192

planos: $x = 0$ y $x = a$, $y = 0$ y $y = a$, $z = 0$ y $z = a$ Examinemos la intersección de seis semiplanos: $x \geqslant 0$. $x \leqslant a$, $y \geqslant 0$, $y \leqslant a$, $z \geqslant 0$, $z \leqslant a$.

Es fácil ver que el cubo $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (fig. 191) es la intersección de los seis semiplanos. La frontera de este poliedro está constituida por seis cuadrados congruentes; los ángulos poliedros son en cada vértice triedros y congruentes, así como son también congruentes todos sus ángulos planos y todos los ángulos diedros. Por consiguiente, el poliedro obtenido es *regular* y se denomina *hexaedro regular* (denominación griega) o *cubo*. Es de señalar que cualquier paralelepípedo es un hexaedro.

2. Tetraedro regular. Los vértices A, B_1, C, D_1 del cubo $ABCDA_1B_1C_1D_1$ no están situados en un mismo plano y, por consiguiente, son vértices de cierto tetraedro. Es fácil ver, que los cuatro triángulos regulares congruentes (fig. 192) son frontera del tetraedro obtenido AB_1CD_1

$$\triangle AB_1C \cong \triangle ACD_1 \cong \triangle AD_1B_1 \cong \triangle B_1CD_1$$

(ya que todos sus lados representan diagonales de los cuadrados congruentes). Los ángulos poliedros en cada vértice del tetraedro son triedros y congruentes; también son congruentes todos los ángulos planos y todos los ángulos diedros. Por consiguiente, el poliedro obtenido es regular y se denomina *tetraedro regular*.

3. **Octaedro regular.** Construyamos en un sistema rectangular de coordenadas seis puntos: A (a; 0; 0), B (0; a; 0),

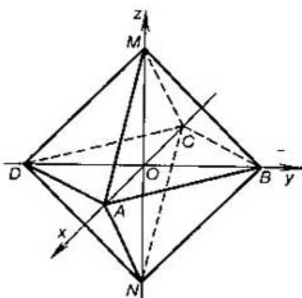
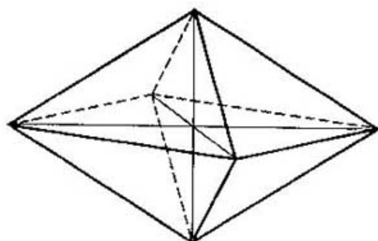


Fig. 193


Fig. 194

C (—a; 0; 0), D (0; —a; 0), M (0; 0; a) y N (0; 0; —a). Cada terna de puntos (M, A, B), (M, B, C), (M, C, D), (M, D, A), (N, A, B), (N, B, C), (N, C, D) y (N, D, A) define un plano (fig. 193).

El octaedro $MABCDN$ será la intersección de ocho semiespacios, limitados por los planos (MAB), (MBC), . . ., . . ., (NDA), que contienen el punto O. Su frontera consta de ocho triángulos regulares congruentes (sus lados son congruentes como las hipotenusas de los triángulos rectangulares congruentes). Todos sus ángulos poliedros son de cuatro caras, regulares y congruentes. Por consiguiente, el octaedro obtenido es regular. Tal octaedro se denomina *octaedro regular* («octaedro» significa «poliedro de ocho caras triangulares»). Existen también octaedros no regulares, por ejemplo, la bipirámide cuadrangular regular (fig. 194) (todas las caras de la bipirámide cuadrangular regular son triángulos isósceles).

4. **Icosaedro regular.** La frontera de este poliedro está constituida por veinte triángulos regulares congruentes

(fig. 195). El icosaedro regular tiene doce ángulos de cinco caras regulares congruentes. Todos sus ángulos diedros son congruentes, así como todos sus ángulos planos («icosaedro» traducido del griego quiere decir «poliedro de veinte caras»).

5. **Dodecaedro regular.** La frontera de este poliedro está constituida por doce pentágonos regulares congruentes

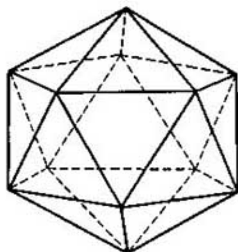


Fig. 195

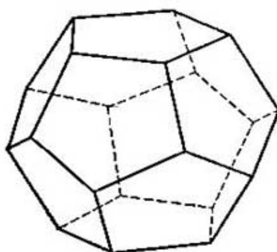


Fig. 196

(fig. 196). El dodecaedro regular tiene veinte ángulos triedros regulares congruentes. Todos sus ángulos diedros son congruentes, así como son congruentes todos los ángulos planos («dodecaedro» traducido del griego significa «poliedro de doce caras»).

Está demostrado que existen sólo cinco poliedros convexos regulares.

Problemas para el capítulo IV

4.1. ¿Cuántos planos se pueden trazar en el espacio a través: a) de un punto; b) de dos puntos distintos; c) de tres puntos distintos que no están situados en una misma recta; d) de tres puntos distintos; e) de cuatro puntos?

4.2. ¿Cuántos planos se pueden trazar en el espacio a través: a) de una recta; b) de dos rectas intersecadas; c) de dos rectas arbitrarias?

4.3. ¿Cuántos planos se pueden trazar en el espacio a través: a) de una recta y un punto; b) de dos rectas intersecadas y un punto?

4.4. En el espacio se dan cuatro puntos, ninguno de los tres de ellos pertenecen a una misma recta. A través de cada par de puntos dados está trazada una recta. ¿Cuántas rectas de éstas se pueden trazar?

4.5. En el espacio se dan cuatro puntos, ninguno de los tres de ellos pertenecen a una misma recta. A través de cada tres de estos puntos está trazado un plano. ¿Cuántos planos de éstos se pueden trazar?

4.6. ¿Es válida la afirmación: si la recta l_1 corta la recta l_2, y la recta l_2 corta la recta l_3, la recta l_1 corta la recta l_3?

4.7. ¿Es válida la afirmación: si las rectas l_1, l_2 son cruzadas y las rectas l_2, l_3 también lo son, entonces son cruzadas l_1 y l_3?

4.8. ¿Cuántos pares de aristas cruzadas, es decir, de aristas situadas en las rectas cruzadas, hay en la pirámide triangular?

4.9. ¿Cúantos pares de aristas paralelas y cruzadas hay en el paralelepípedo?

4.10. Demuéstrese, que a través de dos rectas paralelas pasa un solo plano.

4.11. ¿Como construir una recta que se cruza con:

a) cada una de dos rectas intersecadas;

b) cada una de dos rectas paralelas?

4.12. ¿Cuántos planos, paralelos a la recta l, se pueden trazar a través del punto dado A, fuera de esta recta?

4.13. La recta l es paralela al plano p. ¿Cuántas rectas paralelas a la recta l se pueden trazar en el plano p? ¿Cuál es la posición recíproca de todas estas rectas?

4.14. Se sabe que la recta l es paralela a la recta m, la cual es paralela al plano p. ¿Será la recta l paralela al plano p?

4.15. Sea que las rectas l y m son paralelas, y a través de cada una de ellas está trazado un plano. Demuéstrese que si estos planos se intersecan, la recta de su intersección es paralela a las rectas l y m.

4.16. Demuéstrese que si un plano interseca una de las dos rectas paralelas, él interseca la otra.

4.17. Demuéstrese que si una recta corta uno de los planos paralelos, ella corta también el otro.

4.18. Demuéstrese que si el plano p_1 es paralelo al plano p_2, y p_2 es paralelo al plano p_3, p_1 es paralelo a p_3. (*Propiedad de transitividad*).

4.19. Demuéstrese que los segmentos de las rectas paralelas comprendidos entre planos paralelos, tienen longitudes iguales.

4.20. Constrúyase un plano que pase a través de la recta dada l paralelamente a la recta m (las rectas l y m se cruzan).

4.21. Se da el cubo $ABCDA_1B_1M_1D_1$. Hállese el ángulo entre las rectas: a) AD y BB_1; b) AD y A_1D_1; c) AC y B_1D_1; d) AC y A_1D_1.

4.22. Demuéstrese, que si dos rectas son perpendiculares a un mismo plano, estas rectas son paralelas.

4.23. Demuéstrese que si dos planos son perpendiculares a una misma recta, estos planos son paralelos.

4.24. Los segmentos AB y BC son lados del cuadrado $ABCD$. A través de las rectas AB y BC están trazados los planos p_1 y p_2 respectivamente. La recta l es la línea de intersección de los planos p_1 y p_2, además, $l \perp (AB)$. Demuéstrese que $(AB) \perp p_2$.

4.25. El punto O es el centro del cuadrado con el lado m. El segmento OM es perpendicular al plano del cuadrado, $|OM| = \frac{m}{2}$. Hállese la distancia del punto M al vértice del cuadrado.

4.26. Hállese la distancia del punto M al plano del triángulo equilátero, si el lado de este triángulo es igual a $3\sqrt{3}$ cm, y la distancia del punto a cualquiera de los vértices del triángulo es igual a 5 cm.

4.27. Hállese el conjunto de todos los puntos del espacio, equidistantes de tres puntos dados.

4.28. En el triángulo rectangular isósceles ABC los catetos son iguales a a cm. Del vértice del ángulo recto C trazamos al plano del ΔABC la perpendicular CD, además, $|CD| = 2a$ cm. Hállese la distancia del punto D a la hipotenusa AB.

4.29. Los catetos del triángulo rectangular ABC son iguales a 4 cm y 3 cm. A través del vértice del ángulo recto C del triángulo trazamos la perpendicular n al plano ABC. Hállese la distancia del punto $M \in n$ a la hipotenusa del triángulo, si $|MC| = 2{,}6$ cm.

4.30. Si las caras de un ángulo diedro sirven de prolongación a las caras del otro, tales ángulos diedros se denominan verticales. Demuéstrese que los ángulos diedros verticales son congruentes.

4.31. La perpendicular MA está trazada del punto M de una circunferencia al plano de un círculo, limitado por esta circunferencia. Del punto M se trazó el diámetro MB; $[BC]$ es una cuerda arbitraria. El punto A está unido con los puntos B y C. Determínese la forma del triángulo ABC.

4.32. Demuéstrese que si los planos p y q son perpendiculares, y la recta $l \subset p$ es perpendicular a la recta $m = p \cap q$, entonces $l \perp q$.

4.33. Sean dados tres planos p, q, r, que se cortan de dos en dos. Demuéstrese que si $p \perp r$ y $q \perp r$, la recta $m = p \cap q$ es perpendicular al plano r.

4.34. Demuéstrese, que si el plano es perpendicular a uno de los dos planos paralelos, es también perpendicular al otro.

4.35. Se denomina *bisector* el semiplano, que tiene por su arista, la arista del ángulo diedro y que lo divide en dos partes congruentes. Demuéstrese que los semiplanos bisectores de dos ángulos adyacentes son perpendiculares entre sí.

4.36. Indíquese en el modelo del cubo $ABCDA_1B_1C_1D_1$ las proyecciones de las siguientes figuras sobre el plano de la cara AA_1B_1B: $[C_1D_1]$, $[AD]$, $[C_1D]$, $[DB_1]$, $\triangle C_1CD$, $\triangle ACD$, del cuadrado BB_1C_1C.

4.37. Se da el cubo $ABCDA_1B_1C_1D_1$. a) Hállese la proyección del punto $M \in [B_1C_1]$ sobre los planos de las caras $ABCD$, AA_1D_1D, AA_1B_1B. b) Hállese la proyección del punto $N = [DC_1] \cap [CD_1]$ sobre los planos de las caras señaladas.

4.38. ¿Cuáles son las proyecciones de dos rectas l_1 y l_2 sobre el plano p, si:

a) las rectas l_1 y l_2 se cortan;

b) las rectas l_1 y l_2 se cruzan;

c) las rectas l_1 y l_2 son paralelas?

Examínense todos los casos posibles.

4.39. Los puntos A y B pertenecen al plano p; los segmentos congruentes AA_1 y BB_1 son perpendiculares al plano p y están situados por distintos lados respecto a éste. Hállense las magnitudes de los ángulos del cuadrilátero AA_1BB_1, si $|AA_1| = |AB|$.

4.40. La hipotenusa de un triángulo rectangular es igual a m, la magnitud de su ángulo agudo es de 60°. Hállese el área de proyección de este triángulo sobre el plano, que forma un ángulo de 30° con el plano del triángulo.

4.41. Los lados del triángulo son iguales a 3,9 cm, 4,1 cm y 2,8 cm. Hállese el área de su proyección sobre el plano, que forma un ángulo de 60° con el plano del triángulo.

4.42. Constrúyase la sección del cubo $ABCDA_1B_1C_1D_1$ por el plano, que atraviesa los puntos M, N y K, si

$$M = A_1, \quad |ND_1| = |ND|, \quad |DK| = 2|KC|,$$
$$N \in [DD_1], \quad K \in [DC].$$

4.43. Constrúyase la sección del cubo $ABCDA'B'C'D'$ con la arista a por el plano, que pasa por los puntos medios de las aristas $[AD]$ y $[B'C']$ y por los vértices A' y C. Hállese el área de la sección.

4.44. Constrúyase la sección del cubo por un plano, de manera que ésta sea un hexágono regular.

4.45. Trácense en el tetraedro $MABC$ a través del punto medio de la arista $[AB]$, paralelamente a las aristas de las secciones: a) $[AC]$ y $[AM]$; b) $[BC]$ y $[CM]$; c) $[BC]$ y $[AM]$.

4.46. Hállese el área de la sección trazada por los puntos medios de dos aristas laterales adyacentes de una pirámide cuadrangular regular con el lado a y la altura h, perpendicularmente a la base de la pirámide.

4.47. Determínese si existe un ángulo triedro, cuyos ángulos planos son iguales a: a) 120°, 97°, 33°; b) 120°, 120°, 130°; c) 108°, 92°, 160°; d) 157°, 82°, 64°.

4.48. En un ángulo triedro dos ángulos planos son de 45°, y el ángulo diedro entre ellos, de 90°. Hállese el tercer ángulo plano.

4.49. Los lados de la base de un paralelepípedo recto son iguales a $3\sqrt{2}$ cm y 14 cm, el ángulo entre ellos es de 135°, la arista lateral, de 12 cm. Hállense las diagonales del paralelepípedo.

4.50. La diagonal de un prisma cuadrangular regular es igual a 9 cm; la superficie total del prisma es de 144 cm². Hállense el lado de la base y la arista lateral del prisma.

4.51. La superficie total de un paralelepípedo rectangular es igual a 352 cm². Hállense sus dimensiones si se relacionan como $1:2:3$.

4.52. La arista de un cubo es igual a a. Hállese el área de la sección del cubo por el plano, que pasa por los extremos de las aristas provenientes de un mismo vértice.

4.53. La arista del cubo es igual a a. Hállese la longitud del segmento que une los puntos medios de dos aristas cruzadas.

4.54. En la pirámide cuadrangular regular $MABCD$ el lado de la base es igual a a, la apotema de la pirámide es igual a $\frac{3}{2}a$. Hállese la altura de la pirámide.

4.55. Hállese la altura de la pirámide cuadrangular regular, si su arista lateral es igual a m, y el ángulo plano del vértice es igual a β.

4.56. Se da una pirámide cuya altura es igual a 16 m, y el área de la base es igual a 512 m². Hállese el área de la sección de la pirámide por el plano, trazado paralelamente a la base a la distancia de 5 m del vértice.

4.57. Hállese la arista lateral de la pirámide cuadrangular regular cuyo lado de la base es igual a 14 cm, y el área de la sección diagonal es de 14 cm².

4.58. Un rombo con las diagonales de 12 cm y 16 cm sirve de base de una pirámide. La altura de la pirámide pasa por el punto de intersección de las diagonales y es igual a 6,4 cm. Hállese el área de la superficie total de la pirámide.

4.59. La altura de una pirámide cuadrangular regular es igual a 28 cm, la arista lateral es de 36 cm. Hállese el lado de la base.

4.60. Demuéstrese, que la arista lateral de una pirámide triangular regular es perpendicular a la arista opuesta de la base.

4.61. Demuéstrese, que la superficie lateral de una pirámide regular es igual al área de la base, dividida por el coseno del ángulo entre el plano de la arista lateral y el plano de la base.

4.62. Las aristas de dos poliedros regulares son iguales, en tanto que las áreas de las superficies se relacionan como $\sqrt{3}:6$. Determínense estos poliedros.

4.63. Si designamos con a la arista de un poliedro regular, entonces el área de su superficie es igual a $S = 5a^2\sqrt{3}$. Determínese el poliedro.

4.64. Hállese el ángulo diedro entre las caras de un tetraedro regular.

4.65. Hállese el ángulo diedro entre las caras adyacentes de un octaedro regular.

4.66. Los puntos M, A, B y C no pertenecen a un mismo plano; $(MA) \perp (BC)$, $(MB) \perp (AC)$. Demuéstrese que $(MC) \perp (AB)$.

4.67. Sobre el punto A actúan las fuerzas $\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_2$, $\boldsymbol{F}_3$, además $|\boldsymbol{F}_1| = 3$H, $|\boldsymbol{F}_2| = 4$H y $|\boldsymbol{F}_3| = 5$H. La magnitud del ángulo entre las fuerzas $\boldsymbol{F}_1$ y $\boldsymbol{F}_2$ es igual a 60°, y la fuerza $\boldsymbol{F}_3$ es perpendicular a cada una de ellas. Hállese la magnitud de la resultante.

Capítulo V *

ECUACIONES DE LAS RECTAS Y DE LOS PLANOS EN EL ESPACIO

§ 61. Ecuaciones de la recta

Sea que l es cierta recta en el espacio. Lo mismo que en planimetría (§ 27), cualquier vector $\boldsymbol{a} \neq 0$, colineal a la recta l, se denomina *vector director* de esta recta. La posición de una recta en el espacio se define por entero por un vector director y por un punto perteneciente a la recta. Sea que

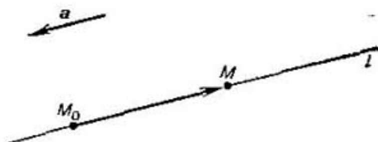


Fig. 197

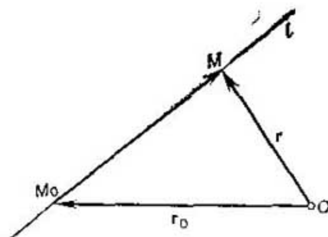


Fig. 198

la recta l con el vector director $\boldsymbol{a}$ pasa por el punto M_0, y M es un punto arbitrario del espacio. Es evidente, que el punto M (fig. 197) pertenece a la recta l cuando y sólo cuando el vector $\overrightarrow{M_0M}$ es colineal al vector $\boldsymbol{a}$, es decir,

$$\overrightarrow{M_0M} = t\boldsymbol{a}, \quad t \in \boldsymbol{R}. \tag{1}$$

Si los puntos M y M_0 están definidos por sus radiovectores $\boldsymbol{r}$ y $\boldsymbol{r}_0$ (fig. 198) respecto a cierto punto O del espacio, entonces $\overrightarrow{M_0M} = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0$, y la ecuación (1) toma la forma

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + t\boldsymbol{a}, \quad t \in \boldsymbol{R}. \tag{2}$$

Las ecuaciones (1) y (2) se denominan *ecuaciones vectoriales paramétricas* de la recta. La variable t en las ecuaciones vectoriales paramétricas de la recta se denomina *parámetro*.

Sea que el punto M_0 de la recta l y el vector director $\boldsymbol{a}$ están dados por sus coordenadas:

$$M_0 (x_0;\ y_0;\ z_0), \quad \boldsymbol{a} = (a_1;\ a_2;\ a_3).$$

Entonces, si $(x;\ y;\ z)$ son coordenadas del punto arbitrario M de la recta l, entonces

$$\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0;\ y - y_0;\ z - z_0)$$

y la ecuación vectorial (1) es equivalente a las tres ecuaciones siguientes:

$$x - x_0 = ta_1, \quad y - y_0 = ta_2, \quad z - z_0 = ta_3$$

ó

$$\begin{cases} x = x_0 + ta_1, \\ y = y_0 + ta_2, \\ z = z_0 + ta_3, \quad t \in R. \end{cases} \tag{3}$$

Las ecuaciones (3) se denominan *ecuaciones paramétricas de la recta* en el espacio.

Problema 1. Escríbanse las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el punto M_0 (—3; 2; 4) y que tiene el vector director $\boldsymbol{a} = (2;\ -5;\ 3)$.

△ En el caso dado $x_0 = -3$, $y_0 = 2$, $z_0 = 4$; $a_1 = 2$; $a_2 = -5$; $a_3 = 3$. Sustituyendo estos valores en las fórmulas (3), obtendremos las ecuaciones paramétricas de la recta dada

$$\begin{cases} x = -3 + 2t, \\ y = 2 - 5t, \\ z = 4 + 3t, \quad t \in R. \end{cases}$$ ▲

Eliminemos el paramétro t de la ecuación (3). Esto se puede hacer ya que $\boldsymbol{a} \neq 0$ y, por lo tanto, una de las coordenadas del vector $\boldsymbol{a}$ es notoriamente diferente de cero.

Sea que primeramente todas las coordenadas son diferentes de cero. Entonces

$$t = \frac{x - x_0}{a_1}, \quad t = \frac{y - y_0}{a_2}, \quad t = \frac{z - z_0}{a_3}$$

y, por consiguiente,

$$\frac{x-x_0}{a_1}=\frac{y-y_0}{a_2}=\frac{z-z_0}{a_3}. \qquad (4)$$

Estas ecuaciones se denominan *ecuaciones canónicas de la recta.*

Es de señalar, que las ecuaciones (4) forman un sistema de dos ecuaciones con tres variables x, y y z.

Si en las ecuaciones (3) una de las coordenadas del vector $\boldsymbol{a}$, por ejemplo a_1, es igual a cero, entonces, eliminando el parámetro t, obtendremos de nuevo un sistema de dos ecuaciones con tres variables x, y y z:

$$x=x_0, \quad \frac{y-y_0}{a_2}=\frac{z-z_0}{a_3}.$$

Estas ecuaciones también se denominan *ecuaciones canónicas de la recta*. Para la uniformidad ellas también se escriben convencionalmente en la forma (4)

$$\frac{x-x_0}{0}=\frac{y-y_0}{a_2}=\frac{z-z_0}{a_3},$$

considerando, que si el denominador es igual a cero, también es igual a cero el nominador respectivo. Estas ecuaciones son ecuaciones de la recta, que pasa por el punto $M_0(x_0, y_0; z_0)$ paralelamente al plano de coordenadas yOz, ya que su vector director $(0; a_2; a_3)$ es paralelo a este plano.

Por fin, si en las ecuaciones (3) dos coordenadas del vector $\boldsymbol{a}$, por ejemplo, a_1 y a_2, son iguales a cero, estas ecuaciones toman la forma

$$x=x_0, \quad y=y_0, \quad z=z_0+ta_3, \quad t\in \boldsymbol{R}.$$

Estas son las ecuaciones de la recta, que pasa por el punto $M_0(x_0; y_0; z_0)$ paralelamente al eje Oz. Para tal recta $x=x_0$, $y=y_0$ y z es un número cualquiera. También en este caso, para la uniformidad, las ecuaciones de la recta pueden ser escritas (con la misma reserva) en la forma (4)

$$\frac{x-x_0}{0}=\frac{y-y_0}{0}=\frac{z-z_0}{a_3}.$$

Así pues, para cualquier recta del espacio se pueden escribir las ecuaciones canónicas (4), y, viceversa, cualquier

ecuación tipo (4), a condición de que, por lo menos, uno de los coeficientes a_1, a_2, a_3 no es igual a cero, define cierta recta del espacio.

Problema 2. Escríbanse las ecuaciones canónicas de la recta que pasa por el punto M_0 (—1; 1; 7) paralelamente al vector $\boldsymbol{a} = (1; 2; 3)$.

△ En el caso dado, las ecuaciones (4) se escriben de la manera siguiente:

$$\frac{x+1}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-7}{3}. \quad \blacktriangle$$

Formemos la ecuación de la recta, que pasa por dos puntos dados M_1 $(x_1;\ y_1;\ z_1)$ y M_2 $(x_2;\ y_2;\ z_2)$. Es evidente, que por vector director de esta recta se puede tomar el vector $\boldsymbol{a} = (x_2 - x_1;\ y_2 - y_1;\ z_2 - z_1)$ y por punto M_0, a través del cual pasa una recta, el punto, por ejemplo M_1. Entonces, las ecuaciones (4) se escribirán del modo siguiente:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}. \tag{5}$$

Estas son las ecuaciones de la recta que pasa por los dos puntos dados M_1 $(x_1;\ y_1;\ z_1)$ y M_2 $(x_2;\ y_2;\ z_2)$.

Problema 3. Escríbanse las ecuaciones de la recta que pasa por los puntos M_1 (—4; 1; —3) y M_2 (—5; 0; 3).

△ En el caso dado, $x_1 = -4$, $y_1 = 1$, $z_1 = -3$, $x_2 = -5$, $y_2 = 0$, $z_2 = 3$. Al sustituir estos valores en las fórmulas (5), obtendremos

$$\frac{x+4}{-1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z+3}{6}. \quad \blacktriangle$$

Problema 4. Escríbanse las ecuaciones de la recta que pasa por los puntos M_1 (3; —2; 1) y M_2 (5; —2; $\frac{1}{2}$).

△ Después de sustituir las coordenadas de los puntos M_1 y M_2 en las ecuaciones (5) obtendremos

$$\frac{x-3}{2}=\frac{y+2}{0}=\frac{z-1}{-\frac{1}{2}}. \quad \blacktriangle$$

§ 62. Ecuación del plano que pasa por tres puntos dados no situados en una misma recta

Sea que los puntos M_1, M_2, M_3 no están situados en una misma recta. Como sabemos, tres puntos tales determinan unívocamente cierto plano p (fig. 199). Formulemos la ecuación del plano p. Sea que M es un punto arbitrario del espacio. Es evidente que el punto M pertenece al plano p cuando y sólo cuando los vectores $\overrightarrow{M_1M}$, $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\overrightarrow{M_1M_3}$ son coplanares. Para que tres vectores sean coplanares es necesario y suficiente que su producto mixto sea igual a cero

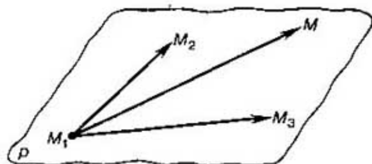


Fig. 199

(el 23*, teorema 2). Por lo tanto, la ecuación del plano que pasa por tres puntos no situados en una misma recta, puede ser escrita en la siguiente forma:

$$(\overrightarrow{M_1M};\ \overrightarrow{M_1M_2};\ \overrightarrow{M_1M_3}) = 0. \qquad (1)$$

Si los puntos M_1, M_2 y M_3 están definidos por las coordenadas en un cierto sistema cartesiano rectangular de coordenadas, entonces la ecuación (1) puede ser escrita en coordenadas. Sea que M_1 $(x_1;\ y_1;\ z_1)$, M_2 $(x_2;\ y_2;\ z_2)$, M_3 $(x_3;\ y_3;\ z_3)$ son los puntos dados. Designemos con x, y y z las coordenadas de un punto arbitrario M del plano p. Hallemos las coordenadas de los vectores que entran en la ecuación (1):

$$\overrightarrow{M_1M} = (x - x_1;\ y - y_1;\ z - z_1),$$
$$\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1;\ y_2 - y_1;\ z_2 - z_1).$$
$$\overrightarrow{M_1M_3} = (x_3 - x_1;\ y_3 - y_1;\ z_3 - z_1).$$

El producto mixto de tres vectores es igual al determinante de tercer orden, en cuyas líneas se encuentran las coordenadas de los vectores (véase el 24*). Por consiguiente, la ecuación (1) en coordenadas tiene la forma

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0. \qquad (2)$$

Hallemos la ecuación del plano que pasa por los tres puntos A (a; 0; 0), B (0; b; 0), C (0; 0; c) de los cuales

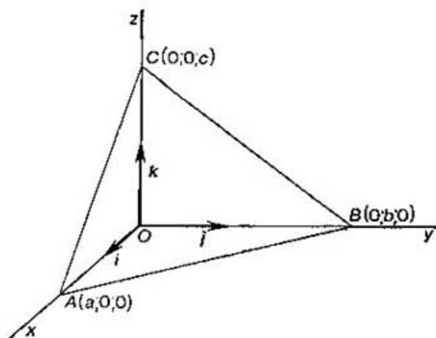


Fig. 200

$a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$. Estos puntos están situados en los ejes de coordenadas (fig. 200).

Considerando en la ecuación (2) $x_1 = a$, $y_1 = 0$, $z_1 = 0$, $x_2 = 0$, $y_2 = b$, $z_2 = 0$, $x_3 = 0$, $y_3 = 0$, $z_3 = c$, obtendremos

$$\begin{vmatrix} x-a & y & z \\ -a & b & 0 \\ -a & 0 & c \end{vmatrix}=0.$$

Desarrollando el determinante en elementos de primera línea, obtendremos la ecuación

$$bc\,(x-a)+acy+abz=0$$

ó

$$bcx+acy+abz=abc,$$

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1. \qquad (3)$$

La ecuación (3) se denomina *ecuación segmentaria de un plano*, ya que los números a, b y c señalan, qué segmentos están cortados por un plano en los ejes de coordenadas.

Problema. Escríbase la ecuación del plano que pasa por los puntos M_1 (—1; 4; —1), M_2 (—13; 2; —10), M_3 (6; 0; 12). Simplifíquese la ecuación obtenida. Obténgase la ecuación segmentaria del plano.

△ En el caso dado, la ecuación (2) se escribe en la forma siguiente:

$$\begin{vmatrix} x+1 & y-4 & z+1 \\ -12 & -2 & -9 \\ 7 & -4 & 13 \end{vmatrix} = 0.$$

Esta es la ecuación del plano dado. Al desarrollar el determinante en la primera línea, obtendremos

$$-62(x+1) + 93(y-4) + 62(z+1) = 0,$$

de donde

$$-2x + 3y + 2z - 12 = 0.$$

Dividiendo término a término entre 12 y trasladando el término independiente de la ecuación al segundo miembro, obtendremos la ecuación segmentaria del plano dado

$$\frac{x}{-6} + \frac{y}{4} + \frac{z}{6} = 1.$$

De la ecuación se deduce que el plano dado corta en los ejes de coordenadas los segmentos, cuyas longitudes son iguales a 6, 4 y 6 respectivamente. El eje Ox corta el plano en un punto con abscisa negativa, el eje Oy, en un punto con ordenada positiva, el eje Oz, en un punto con z-coordenada positiva. ▲

§ 63. Ecuación del plano que pasa por un punto dado y es perpendicular a un vector dado

Sea dado cierto punto M_0 y el vector no nulo $\boldsymbol{n}$. A través del punto M_0 se puede trazar sólo un plano p perpendicular al vector $\boldsymbol{n}$ (fig. 201).

Deduzcamos la ecuación del plano p. Sea que M es un punto arbitrario del espacio. Es evidente, que el punto M pertenece al plano p, si, y sólo si, el vector $\overrightarrow{M_0M}$ es

perpendicular al vector $\boldsymbol{n}$. Como sabemos (véase el § 18) para que dos vectores sean perpendiculares es necesario y suficiente que su producto escalar sea igual a cero. Por lo tanto, la ecuación del plano que pasa por el punto M_0 perpendicularmente al vector $\boldsymbol{n}$, puede ser escrita en la forma

$$\overrightarrow{M_0M} \cdot \boldsymbol{n} = 0. \qquad (1)$$

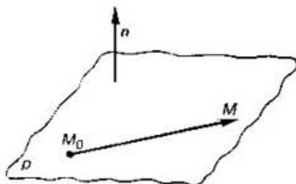


Fig. 201

El vector $\boldsymbol{n}$ en la ecuación (1) se denomina *vector normal de un plano*. Por vector normal se puede tomar un vector cualquiera, que sea perpendicular al plano.

Sea que el punto M_0 y el vector $\boldsymbol{n}$ están definidos por sus coordenadas en un cierto sistema rectangular de coordenadas:

$$M_0\,(x_0;\ y_0;\ z_0), \qquad \boldsymbol{n} = (A;\ B;\ C).$$

Designemos con x, y y z las coordenadas de un punto arbitrario M del plano p. Entonces, el vector $\overrightarrow{M_0M}$ tiene las coordenadas $x - x_0$, $y - y_0$ y $z - z_0$, y la ecuación (1) en coordenadas (véase el 19) se escribe en la siguiente forma:

$$A\,(x - x_0) + B\,(y - y_0) + C\,(z - z_0) = 0. \qquad (2)$$

Esta ecuación se denomina *ecuación del plano que pasa a través de un punto* $(x_0;\ y_0;\ z_0)$ *perpendicularmente al vector* $(A;\ B;\ C)$.

Problema 1. Hállese la ecuación del plano que pasa por el punto $M_0\,(-3;\ 4;\ 7)$ y es perpendicular al vector $\boldsymbol{n} = (1;\ -2;\ 6)$.

△ En el caso dado $x_0 = -3$, $y_0 = 4$, $z_0 = 7$; $A = 1$, $B = -2$, $C = 6$. Sustituyendo estos valores en la ecuación (2), obtendremos la ecuación buscada

6

$$1\,(x + 3) - 2\,(y - 4) + 6\,(z - 7) = 0,$$

$$x - 2y + 6z - 31 = 0. \ ▲$$

Problema 2. Se dan los puntos $M_1\,(2;\ -1;\ 3)$ y $M_2\,(4;\ 5;\ 0)$. Escríbase la ecuación del plano que pasa por el punto M_2 y es perpendicular al vector $\boldsymbol{n} = \overrightarrow{M_1M_2} = (2;\ 6;\ -3)$.

15*

△ Por vector normal del plano se puede tomar el vector $n = \overrightarrow{M_1M_2} = (2;\ 6;\ -3)$. Después de sustituir las coordenadas del vector normal y las coordenadas del punto $M_0 = M_2\,(4;\ 5;\ 0)$ en la ecuación (2) obtendremos

$$2\,(x-4)+6\,(y-5)-3z=0$$

ó

$$2x+6y-3z-38=0. \ \blacktriangle$$

Problema 3. En un triángulo con los vértices en los puntos $A_1\,(-5;\ 2;\ 7)$, $A_2\,(5;\ 0;\ 6)$, $A_3\,(0;\ -1;\ 2)$, está trazada la mediana A_1M_0. Hállese la ecuación del plano que pasa por el punto M_0 y es perpendicular a la mediana A_1M_0.

△ Por el vector normal del plano se puede tomar el vector $n = \overrightarrow{A_1M_0}$. Determinemos sus coordenadas. El punto M_0 es el punto medio del segmento A_2A_3, por lo tanto, si $(x_0;\ y_0;\ z_0)$ son sus coordenadas, entonces

$$x_0=\frac{5+0}{2}=\frac{5}{2}, \quad y_0=\frac{0-1}{2}=-\frac{1}{2}, \quad z_0=\frac{6+2}{2}=4.$$

Las coordenadas del vector normal $n = (A;\ B;\ C)$ son, por consiguiente, iguales a $A = \frac{5}{2}+5 = \frac{15}{2}$, $B = -\frac{1}{2} - 2 = -\frac{5}{2}$, $C = 4-7 = -3$. La ecuación (2) tiene en el caso dado la forma

$$\frac{15}{2}\left(x-\frac{5}{2}\right)-\frac{5}{2}\left(y+\frac{1}{2}\right)-3\,(z-4)=0$$

ó

$$15x-5y-6z-16=0. \ \blacktriangle$$

§ 64. Ecuación general del plano

Examinemos en el espacio un plano arbitrario. Sea que $M_0\,(x_0;\ y_0;\ z_0)$ es cierto punto de este plano y $n = (A;\ B;\ C)$, su vector normal cualquiera. En el párrafo anterior fue demostrado, que la ecuación de este plano tiene la forma

$$A\,(x-x_0)+B\,(y-y_0)+C\,(z-z_0)=0.$$

Escribámosla así:

$$Ax + By + Cz - Ax_0 - By_0 - Cz_0 = 0.$$

Designando con D el número $-Ax_0 - By_0 - Cz_0$, obtendremos la ecuación

$$Ax + By + Cz + D = 0. \qquad (1)$$

Así pues, cada plano en el espacio puede ser definido por la ecuación (1), es decir, por una ecuación lineal con tres variables.

También es válida la afirmación inversa: toda ecuación lineal con tres variables, es decir, toda ecuación tipo (1) define un plano.

En efecto, en la ecuación (1), por lo menos uno de los coeficientes A, B, C no es igual a cero, de lo contrario la ecuación (1) es lineal. Sea que, por ejemplo, $C \neq 0$, entonces la ecuación puede escribirse en la siguiente forma:

$$A(x-0) + B(y-0) + C\left(z + \frac{D}{C}\right) = 0.$$

De acuerdo con el párrafo anterior la ecuación obtenida y, por consiguiente, la ecuación (1) determinan el plano que pasa por el punto $M_0\left(0; 0; -\frac{D}{C}\right)$ y es perpendicular al vector $\boldsymbol{n}(A; B; C)$.

La ecuación (1) se denomina *ecuación general del plano.*

Subrayemos, que en esta ecuación los coeficientes A, B, C son coordenadas de un vector del plano. Por ejemplo, si el plano está definido por la ecuación $3x + 4y - 5z + 17 = 0$, se puede concluir inmediatamente que él es perpendicular al vector $(3; 4; -5)$.

Problema. Hállese el vector normal unitario del plano

$$7x + 4y - 4z + 1 = 0.$$

△ Por vector normal del plano dado se puede tomar el vector $\boldsymbol{n} = (7; 4; -4)$. Hallemos su longitud: $|\boldsymbol{n}| = \sqrt{49 + 16 + 16} = 9$. Por consiguiente, el vector normal unitario es el vector $\left(\frac{7}{9}; \frac{4}{9}; -\frac{4}{9}\right)$. El vector que le es contrario $\left(-\frac{7}{9}; -\frac{4}{9}; \frac{4}{9}\right)$, también será, evidentemente, un vector normal unitario del plano dado. ▲

Analicemos cómo se sitúa el plano respecto al sistema de coordenadas en función de los valores A, B, C, D en la ecuación general del plano.

a) Si en la ecuación (1) $A = 0$, es decir, si esta ecuación tiene la forma $By + Cz + D = 0$, el vector normal tiene las coordenadas (0; B; C). El vector con tales coordenadas es perpendicular al eje Ox, por consiguiente, el plano es paralelo a este eje. Si no sólo $A = 0$, sino que $D = 0$, es decir, si la ecuación tiene la forma $By + Cz = 0$, el plano pasa a través del origen de coordenadas. Por lo tanto, cuando $A = D = 0$ el plano pasa por el eje Ox. Análogamente se analizan los casos cuando $B = 0$ (el plano es paralelo al eje de ordenadas) o $C = 0$ (el plano es paralelo al eje de las z-ordenadas).

b) Si en la ecuación (1) $A = 0$ y $B = 0$, es decir, si la ecuación tiene la forma $Cz + D = 0$, el vector normal tiene las coordenadas (0; 0; C). El vector con tales coordenadas es perpendicular al plano xOy, por consiguiente, en este caso el plano (1) es paralelo al plano de coordenadas xOy. Si no sólo $A = B = 0$, sino que $D = 0$, es decir, si la ecuación tiene la forma $Cz = 0$, el plano no sólo es paralelo al plano de coordenadas xOy, sino que pasa por el origen de coordenadas. Por lo tanto, cuando $A = B = D = 0$ la ecuación (1) define el plano de coordenadas xOy.

Análogamente se analizan los casos, cuando otro par cualquiera de coeficientes es en la ecuación (1), para las variables x, y, z, igual a cero.

c) Si en la ecuación (1) $D = 0$, es decir, si la ecuación tiene la forma $Ax + By + Cz=0$, el plano pasa por el origen de coordenadas y es perpendicular al vector (A; B; C).

d) Si en la ecuación (1) todos los coeficientes para las variables y el término independiente son diferentes de cero, la ecuación puede ser transformada en la ecuación segmentaria de un plano:

$$\frac{x}{\left(-\frac{D}{A}\right)} + \frac{y}{\left(-\frac{D}{B}\right)} \frac{z}{\left(-\frac{D}{C}\right)} = 1.$$

En este caso, el plano corta los ejes de coordenadas en los puntos: $\left(-\frac{D}{A}; 0; 0\right)$, $\left(0; -\frac{D}{B}; 0\right)$, $\left(0; 0; -\frac{D}{C}\right)$. Es fácil construir el plano por estos tres puntos.

§ 65. Cálculo del ángulo entre los planos. Condiciones de paralelismo y perpendicularidad

Examinemos dos planos p_1 y p_2 con los vectores normales $\boldsymbol{n}_1$ y $\boldsymbol{n}_2$. El ángulo φ entre los planos p_1 y p_2 se expresa por el ángulo $\psi = (\widehat{\boldsymbol{n}_1;\ \boldsymbol{n}_2})$ en la forma siguiente: si $\psi \leqslant 90°$, $\varphi = \psi$ (fig. 202, *a*); si $\psi > 90°$, entonces $\varphi = 180° - \psi$

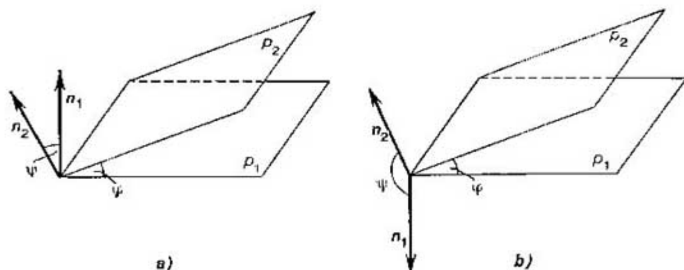


Fig. 202

(fig. 202, *b*). Es evidente que en todo caso es válida la igualdad

$$\cos \varphi = | \cos \psi |.$$

Según la fórmula (1) del § 20 tenemos

$$\cos \psi = \cos (\widehat{\boldsymbol{n}_1;\ \boldsymbol{n}_2}) = \frac{\boldsymbol{n}_1 \cdot \boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1| \cdot |\boldsymbol{n}_2|}$$

y, por consiguiente, el coseno del ángulo entre los planos p_1 y p_2 puede calcularse según la fórmula

$$\cos \varphi = \frac{|\, \boldsymbol{n}_1 \cdot \boldsymbol{n}_2 \,|}{|\, \boldsymbol{n}_1 \,| \cdot |\, \boldsymbol{n}_2 \,|}. \qquad (1)$$

Si los planos están definidos por las ecuaciones generales $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ y $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$, entonces por sus vectores normales se puede tomar los vectores $\boldsymbol{n}_1 = (A_1;\ B_1;\ C_1)$ y $\boldsymbol{n}_2 = (A_2\ B_2;\ C_2)$.

Escribiendo el segundo miembro de la fórmula (1) en coordenadas obtendremos

$$\cos\varphi = \frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\,\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}. \qquad (2)$$

Problema 1. Calcúlese el ángulo entre los planos
$x-\sqrt{2}y+z-2=0$ y $x+\sqrt{2}y-z+13=0$.

△ En el caso dado

$A_1=1,\ B_1=-\sqrt{2},\ C_1=1,\ A_2=1,\ B_2=\sqrt{2},\ C_2=-1.$

Según la fórmula (2) obtenemos

$$\cos\varphi = \frac{|1\cdot 1-\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}-1\cdot 1|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+1^2}\,\sqrt{1^2+(\sqrt{2})^2+(-1)^2}} = \frac{1}{2}.$$

Por consiguiente, el ángulo entre los planos dados es igual a 60°. ▲

Los planos con los vectores normales $\boldsymbol{n}_1$ y $\boldsymbol{n}_2$:

a) son paralelos cuando y sólo cuando los vectores $\boldsymbol{n}_1$ y $\boldsymbol{n}_2$ son colineales;

b) son perpendiculares cuando y sólo cuando los vectores $\boldsymbol{n}_1$ y $\boldsymbol{n}_2$ son perpendiculares, es decir, cuando $\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2=0$.

De aquí obtenemos las condiciones necesarias y suficientes de paralelismo y perpendicularidad de dos planos definidos por las ecuaciones generales.

Para que los planos
$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ y $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ sean paralelos, es necesario y suficiente que se cumplan las igualdades

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}. \qquad (3)$$

Si cualquiera de los coeficientes A_2, B_2, C_2 es igual a cero, se sobrentiende, que es igual a cero también el coeficiente correspondiente A_1, B_1, C_1.

Si no se cumple por lo menos una de estas dos igualdades, los planos no son paralelos, es decir, ellos se cortan.

Para que sean perpendiculares los planos
$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ y $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$, es necesario y suficiente que se cumpla la igualdad

$$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0. \qquad (4)$$

Problema 2. Señalar los planos paralelos y perpendiculares entre los siguientes pares de planos:

$$2x + 5y + 7z - 1 = 0 \text{ y } 3x - 4y + 2z = 0,$$
$$y - 3z + 1 = 0 \text{ y } 2y - 6z + 5 = 0,$$
$$4x + 2y - 4z + 1 = 0 \text{ y } 2x + y + 2z + 3 = 0.$$

△ Para el primer par de planos

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 2\cdot 3 + 5\cdot(-4) + 7\cdot 2 = 0,$$

es decir, se cumple la condición de perpendicularidad. Los planos son perpendiculares.

Para el segundo par de planos tenemos

$$\frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}, \quad \text{ya que } \frac{1}{2} = \frac{-3}{-6},$$

y los coeficientes A_1 y A_2 son iguales a cero. Por consiguiente, los planos del segundo par son paralelos.

Para el tercer par tenemos

$$\frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}, \quad \text{ya que } \frac{2}{1} \neq \frac{-4}{2},$$

y $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 4\cdot 2 + 2\cdot 1 - 4\cdot 2 \neq 0$, es decir, los planos del tercer par no son paralelos ni perpendiculares.

§ 66. Condiciones de coincidencia e intersección de los planos

Si los planos p_1 y p_2 definidos por las ecuaciones

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \text{ y } A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \quad (1)$$

tienen un punto común, entonces sus coordenadas satisfacen cualquiera de las ecuaciones (1). Por lo tanto, para hallar los puntos comunes de los planos dados se debe resolver el sistema de las ecuaciones

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \end{cases} \quad (2)$$

es decir, el sistema de dos ecuaciones con tres variables. Cuando se cumple la condición

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2} \quad (3)$$

el sistema (2) no tiene soluciones. En efecto, supongamos lo inverso, o sea, que $(x_0;\ y_0;\ z_0)$ son las soluciones del sistema. Entonces, si

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}=k,$$

de la segunda ecuación del sistema (2) obtenemos

$$A_2x_0+B_2y_0+C_2z_0=-D_2,$$

y de la primera

$$k(A_2x_0+B_2y_0+C_2z_0)=-D_1$$

y, por consiguiente, $\frac{D_1}{D_2}=k$, lo que contradice a la condición (3).

Sabemos que la condición $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$, es la condición de paralelismo de los planos. Así pues, siempre que se cumplan las condiciones (3), los planos p_1 y p_2 son paralelos y no coinciden.

En el caso, cuando los coeficientes y los términos independientes del sistema (2) satisfacen la condición

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}=\frac{D_1}{D_2}, \tag{4}$$

el sistema tiene la forma

$$\begin{cases} k(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0. \end{cases}$$

Cada una de las ecuaciones del sistema determina un mismo plano. Así pues, la condición (4) es la condición necesaria y suficiente de coincidencia de los planos.

Si los planos p_1, p_2 no son paralelos, es decir, si ellos se cortan, entonces

$$\frac{A_1}{A_2}\neq\frac{B_1}{B_2} \quad \text{ó} \quad \frac{B_1}{B_2}\neq\frac{C_1}{C_2}. \tag{5}$$

En este caso las ecuaciones (2) son las ecuaciones de la recta l de intersección de los planos p_1 y p_2. Mostremos cómo se pueden hallar las ecuaciones canónicas de esta recta. Para escribir las ecuaciones canónicas de la recta, hace falta saber las coordenadas de cierto punto suyo y las

coordenadas de su vector director $\boldsymbol{a}$. Por coordenadas del punto M_0 se puede tomar cualquier solución del sistema (2). Por vector director $\boldsymbol{a}$ de la recta l se puede tomar el producto vectorial de los vectores $\boldsymbol{n}_1 = (A_1;\ B_1;\ C_1)$ y $\boldsymbol{n}_2 = (A_2;\ B_2;\ C_2)$, es decir, de los vectores normales de los planos p_1 y p_2. En efecto (fig. 203), el vector $[\boldsymbol{n}_1;\ \boldsymbol{n}_2]$ es, según la definición del producto vectorial, perpendicular

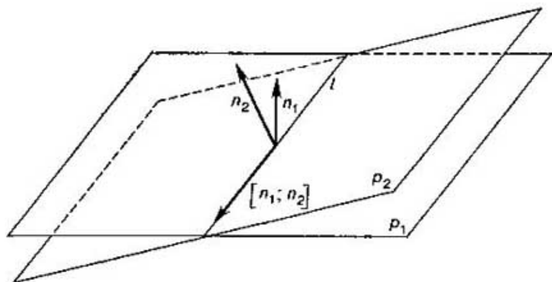


Fig. 203

a los vectores $\boldsymbol{n}_1$ y $\boldsymbol{n}_2$ y, por lo tanto, dicho vector es paralelo a los planos p_1 y p_2 y, por consiguiente, colineal a la recta l de su intersección.

Problema 1. Fórmese la ecuación canónica de una recta, que es la intersección de los planos $x - 2y + z + 1 = 0$ y $2x - y + 3x - 2 = 0$.

△ Puesto que $\boldsymbol{n}_1 = (1;\ -2;\ 1)$, $\boldsymbol{n}_2 = (2;\ -1;\ 3)$, entonces

$$\boldsymbol{a} = [\boldsymbol{n}_1; \boldsymbol{n}_2] = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -5\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}.$$

Para determinar las coordenadas de cualquier punto de una recta dada hallemos cualquier solución del sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x - 2y + z + 1 = 0, \\ 2x - y + 3z - 2 = 0. \end{cases}$$

Considerando que, por ejemplo, $z = 0$, obtendremos

$$\begin{cases} x - 2y = -1, \\ 2x - y = 2, \end{cases}$$

de donde $x = \frac{5}{3}$, $y = \frac{4}{3}$. Por consiguiente, el sistema inicial tiene la solución $\left(\frac{5}{3}; \frac{4}{3}; 0\right)$, y, por lo tanto, la recta dada pasa por el punto $M\left(\frac{5}{3}; \frac{4}{3}; 0\right)$.

Conociendo las coordenadas de un punto de la recta y las coordenadas de su vector director, escribimos las ecuaciones canónicas de la recta dada

$$\frac{x - \frac{5}{3}}{-5} = \frac{y - \frac{4}{3}}{-1} = \frac{z}{3}. \blacktriangle$$

Es de señalar, que si los planos $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ y $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ se intersecan, la ecuación de todo plano que pasa por la recta de su intersección, puede ser escrita en la forma

$$\alpha (A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \beta (A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0$$

donde α y β son ciertos números.

Problema 2. Escríbase la ecuación del plano, que pasa por la recta de intersección de los planos $3x - 2y - z + 4 = 0$ y $x - 4y - 3z - 2 = 0$ y el punto M_0 (1; 1; −2).

△ Formemos la ecuación de los planos, que pasan por la recta de intersección de los planos dados:

$$\alpha (3x - 2y - z + 4) + \beta (x - 4y - 3z - 2) = 0.$$

Puesto que M_0 pertenece al plano buscado, entonces

$$\alpha (3 \cdot 1 - 2 \cdot 1 + 2 + 4) + \beta (1 - 4 \cdot 1 + 6 - 2) = 0,$$

y, por consiguiente,

$$7\alpha + \beta = 0,$$

de donde se deduce, por ejemplo, que $\alpha = 1$, $\beta = -7$.

La ecuación buscada del plano será

$$3x - 2y - z + 4 - 7 (x - 4y - 3z - 2) = 0,$$

ó

$$2x - 13y - 10z - 9 = 0. \blacktriangle$$

§ 67. Ecuación normal del plano

Sea que q es un plano arbitrario (fig. 204). Designemos con p la distancia entre el origen de coordenadas y el plano q, y con α, β, γ, los ángulos entre el vector normal $\boldsymbol{n}$ del plano q y los ejes de coordenadas. Es evidente, que la posición del plano en el espacio se define por entero por las magnitudes α, β, γ y p. Expresemos la ecuación del plano q por medio de estas magnitudes.

Sea que M_0 es el punto de intersección del plano q y de una recta perpendicular a él, que pasa por el origen de

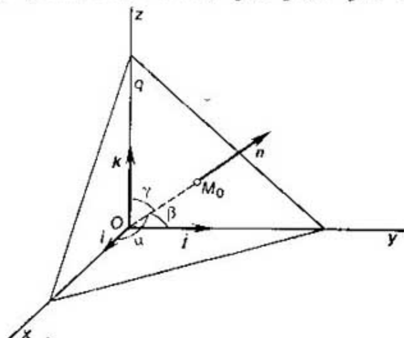


Fig. 204

coordenadas, $\boldsymbol{n}_0$ es el vector normal unitario del plano q. Las coordenadas del punto M_0 y del vector $\boldsymbol{n}_0$ se expresan por medio de las magnitudes dadas α, β, γ y p del modo siguiente:

$$M_0\,(p\cos\alpha;\ p\cos\beta;\ p\cos\gamma),$$

$$\boldsymbol{n}_0 = (\cos\alpha;\ \cos\beta;\ \cos\gamma).$$

En el párrafo 63 obtuvimos la ecuación del plano que pasa por el punto $(x_0;\ y_0;\ z_0)$ y tiene el vector normal $(A;\ B;\ C)$: $A\,(x - x_0) + B\,(y - y_0) + C\,(z - z_0) = 0$.

Sustituyendo en esta ecuación las coordenadas del punto M_0 y del vector $\boldsymbol{n}_0$, obtendremos la ecuación del plano q

$$\cos\alpha\,(x - p\cos\alpha) + \cos\beta\,(y - p\cos\beta) + \\ + \cos\gamma\,(z - p\cos\gamma) = 0$$

ó

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p\,(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \\ + \cos^2\gamma) = 0.$$

Puesto que $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ son las coordenadas del vector normal unitario n_0, entonces $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ y, por consiguiente,

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0. \qquad (1)$$

La ecuación (1) se denomina *ecuación normal del plano.* En esta ecuación los coeficientes de las variables x, y y z son las coordenadas del vector normal unitario del plano, y el término independiente $(-p)$, tomado con signo menos, es igual a la distancia entre el origen de coordenadas y el plano.

Por ejemplo, la ecuación $\sqrt{2}x - y - z + 20 = 0$ no es una ecuación normal, ya que el vector $(\sqrt{2};\ -1;\ -1)$ no es unitario y el término independiente de la ecuación es positivo. Multipliquemos ambos miembros de la ecuación dada por $\left(-\frac{1}{2}\right)$. La ecuació obteniba

$$-\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z - 10 = 0$$

es normal, ya que el vector $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};\ \frac{1}{2};\ \frac{1}{2}\right)$, como es fácil comprobar, es unitario, y el término independiente de la ecuación es negativo. El vector normal del plano examinado forma con los ejes de coordenadas tales ángulos α, β y γ que

$$\cos\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos\beta = \frac{1}{2}, \quad \cos\gamma = \frac{1}{2},$$

es decir, $\alpha = 135°$, $\beta = \gamma = 60°$. El plano pasa a la distancia de 10 unidades de longitud del origen de coordenadas.

La ecuación general del plano

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

siempre puede ser transformada de manera tal, que se reduzca a la forma normal. Para esto es necesario multiplicar ambos miembros de la ecuación por el factor normalizador

$$\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \text{ si } D \leqslant 0, \qquad \text{y} -\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

si $D > 0$.

En efecto, si $D \leqslant 0$, la ecuación

$$\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}x+\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}y+$$
$$+\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}z+\frac{D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=0$$

es normal, ya que el vector

$$\left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}};\ \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}};\ \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right)$$

es unitario y $\frac{D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \leqslant 0$. Si $D > 0$, la ecuación

$$-\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}x-\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}y-$$
$$-\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}z-\frac{D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=0$$

es normal.

Problema. Calcular la distancia entre el origen de coordenadas y el plano $4x+\sqrt{11}y+3z+150=0$.

△ Puesto que $D=150>0$, el factor normalizador es igual a

$$-\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=-\frac{1}{\sqrt{16+11+9}}=-\frac{1}{6}.$$

La ecuación normal del plano dado es la ecuación

$$-\frac{2}{3}x-\frac{\sqrt{11}}{6}y-\frac{1}{2}z-25=0.$$

Teniendo en cuenta el sentido geométrico del término independiente de la ecuación normal del plano, obtenemos, que la distancia buscada es igual a 25. ▲

§ 68. Distancia de un punto a un plano

Hallemos la distancia d del punto arbitrario $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ al plano q definido por su ecuación normal

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0.$$

Esta distancia es igual a la longitud del segmento M_1K, donde K es la proyección del punto M_1 sobre el plano q

(fig. 205). Sea que M_0 es el punto de intersección del plano q con la recta perpendicular a él, que pasa por el origen de coordenadas; $\boldsymbol{n}_0$ es el vector normal unitario del plano q.

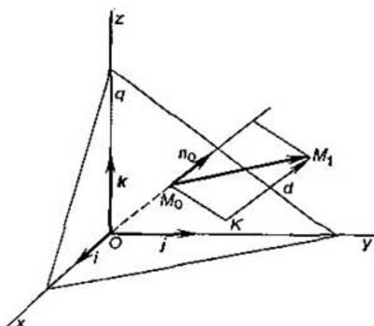


Fig. 205

La distancia buscada d es igual al módulo de la proyección del vector $\overrightarrow{M_0M_1}$ sobre la dirección del vector $\overrightarrow{KM_1}$ o, como $\overrightarrow{KM_1}$ y $\boldsymbol{n}_0$ son colineales, sobre la dirección del vector $\boldsymbol{n}_0$. De este modo,

$$d = |\mathrm{pr}_{\boldsymbol{n}_0}\overrightarrow{M_0M_1}|. \tag{1}$$

Expresemos la proyección del vector $\overrightarrow{M_0M_1}$ sobre la dirección del vector $\boldsymbol{n}_0$ por el producto escalar de estos vectores.

De acuerdo con la fórmula (3) del § 17 obtendremo

$$d = |\mathrm{pr}_{\boldsymbol{n}_0}\overrightarrow{M_0M_1}| = |\overrightarrow{M_0M_1}\cdot\boldsymbol{n}_0|.$$

Puesto que $\overrightarrow{M_0M_1} = (x_1 - p\cos\alpha;\ y_1 - p\cos\beta;\ z_1 - - p\cos\gamma)$ y $\boldsymbol{n}_0 = (\cos\alpha;\ \cos\alpha;\ \cos\gamma)$, entonces

$$d = |\,(x_1 - p\cos\alpha)\cos\alpha + (y_1 - p\cos\beta)\cos\beta + + (z_1 - p\cos\gamma)\cos\gamma\,|$$

y, por consiguiente,

$$d = | x_1 \cos\alpha + y_1 \cos\beta + z_1 \cos\gamma - p |.$$

Así pues, la distancia de un punto a un plano es igual al módulo del número, obtenido como resultado de la sustitución de las coordenadas del punto dado, en el primer miembro de la ecuación normal del plano.

Problema 1. Determínese la distancia del punto M (0; 1; 1) al plano $\sqrt{23}x - 7y - 3z + 73 = 0$.

Normalizamos la ecuación del plano. Puesto que el factor normalizador es igual a $-\frac{1}{\sqrt{23+49+9}} = -\frac{1}{9}$, obtenemos

$$-\frac{\sqrt{23}}{9}x + \frac{7}{9}y + \frac{3}{9}z - \frac{73}{9} = 0.$$

Según la fórmula (2) hallemos la distancia

$$d = \left| -\frac{\sqrt{23}}{9} \cdot 0 + \frac{7}{9} \cdot 1 + \frac{3}{9} \cdot 1 - \frac{73}{9} \right| = \frac{|7+3-73|}{9} = 7. \ \blacktriangle$$

Problema 2. Hállese la distancia entre los planos paralelos

$$x - 2y + 2z - 3 = 0 \text{ y } 2x - 4y + 4z - 30 = 0.$$

△ Para determinar la distancia entre dos planos paralelos es suficiente escoger en uno de ellos un punto cualquiera y luego hallar la distancia de este punto al otro plano. El punto (15; 0; 0) pertenece, evidentemente, al segundo plano. La ecuación normal del primer plano es la ecuación

$$\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z - 1 = 0.$$

Hallamos la distancia d por la fórmula (2):

$$d = \left| \frac{1}{3} \cdot 15 - \frac{2}{3} \cdot 0 + \frac{2}{3} \cdot 0 - 1 \right| = 4.$$

§ 69. Cálculo de un ángulo entre rectas

El problema de cálculo de un ángulo entre dos rectas en el espacio se resuelve del mismo modo que en el plano (32). Designemos con φ la magnitud del ángulo entre las rectas l_1 y l_2, y con ψ, la magnitud del ángulo entre los vectores directores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ de estas rectas. Entonces, si $\psi \leqslant 90°$

(fig. 206, *a*), $\varphi = \psi$; si $\psi > 90°$ (fig. 206, *b*), $\varphi = 180° - \psi$. Es evidente que en ambos casos la igualdad $\cos \varphi = |\cos \psi|$

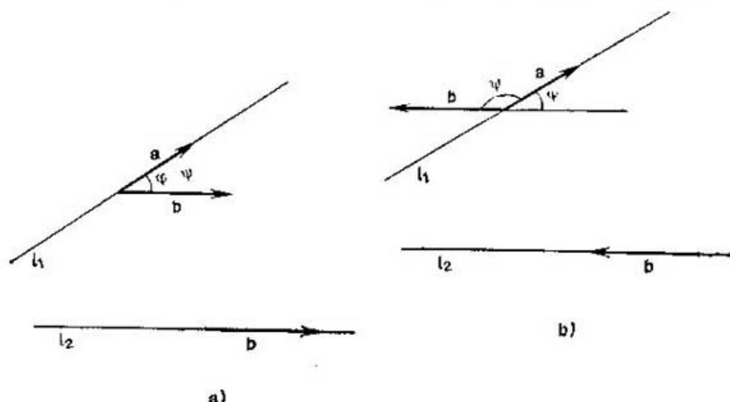


Fig. 206

es válida. Según la fórmula (1) del 20 tenemos

$$\cos \psi = \cos (\widehat{a;\ b}) = \frac{a \cdot b}{|a| \cdot |b|},$$

por consiguiente,

$$\cos \varphi = \frac{|a \cdot b|}{|a| \cdot |b|}.$$

Sea que las rectas están definidas por sus ecuaciones canónicas

$$\frac{x - x_1}{a_1} = \frac{y - y_1}{a_2} = \frac{z - z_1}{a_3} \quad y \quad \frac{x - x_2}{b_1} = \frac{y - y_2}{b_2} = \frac{z - z_2}{b_3}.$$

Entonces, el ángulo φ entre las rectas se determina con ayuda de la fórmula

$$\cos \varphi = \frac{|a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3|}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\ \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}. \quad (1)$$

Si una de las rectas (o ambas) está definida no por las ecuaciones canónicas, entonces para calcular el ángulo es necesario hallar las coordenadas de los vectores directores de estas rectas y, luego, hacer uso de la fórmula (1).

Problema 1. Calcúlese el ángulo entre las rectas

$$\frac{x+3}{-\sqrt{2}}=\frac{y}{\sqrt{2}}=\frac{z-7}{-2} \quad \text{y} \quad \frac{x}{\sqrt{3}}=\frac{y+1}{\sqrt{3}}=\frac{z-1}{\sqrt{6}}.$$

△ Los vectores directores de las rectas tienen las coordenadas: $\boldsymbol{a}=(-\sqrt{2};\sqrt{2};\ -2)$, $\boldsymbol{b}=(\sqrt{3};\ \sqrt{3};\ \sqrt{6})$. Según la fórmula (1) hallamos

$$\cos\varphi=\frac{|-\sqrt{6}+\sqrt{6}-2\sqrt{6}\,|}{\sqrt{2+2+4}\,\sqrt{3+3+6}}=\frac{2\sqrt{6}}{2\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{3}}=\frac{1}{2}.$$

Por consiguiente, el ángulo entre las rectas dadas es igual a 60°. ▲

Problema 2. Calcúlese el ángulo entre las rectas

$$\begin{cases} 3x-12z+7=0, \\ x+y-3z-1=0, \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} 4x-y+z=0, \\ y+z+1=0. \end{cases}$$

△ Tomemos por vector director $\boldsymbol{a}$ de la primera recta el producto vectorial de los vectores normales $\boldsymbol{n}_1=(3;\ 0;\ -12)$ y $\boldsymbol{n}_2=(1;\ 1;\ -3)$ de los planos que definen esta recta. Según la fórmula (4) del 22 obtenemos

$$\boldsymbol{a}=[\boldsymbol{n}_1;\ \boldsymbol{n}_2]=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 3 & 0 & -12 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix}=12\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}.$$

Análogamente hallamos el vector director de la segunda recta:

$$\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 4 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}=-2\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k}.$$

Según la fórmula (1) calculamos el coseno del ángulo buscado:

$$\cos\varphi=\frac{|\,12\cdot(-2)-3\cdot(-4)+3\cdot 4\,|}{\sqrt{12^2+3^2+3^2}\,\sqrt{2^2+4^2+4^2}}=0.$$

Por consiguiente, el ángulo entre las rectas dadas es igual a 90°. ▲

Problema 3. En la pirámide triangular $MABC$ las aristas MA, MB y MC son recíprocamente perpendiculares (fig. 207);

sus longitudes son iguales a 4, 3, 6 respectivamente. El punto D es el punto medio de $[MA]$. Hállese el ángulo φ entre las rectas CA y DB.

△ Sea que $\overrightarrow{CA}$ y $\overrightarrow{DB}$ son los vectores directores de las rectas CA y DB.

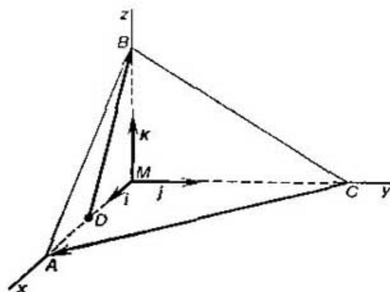


Fig. 207

Tomemos el punto M por origen de coordenadas. Según la condición del problema tenemos $A\ (4;\ 0;\ 0)$, $B\ (0;\ 0;\ 3)$, $C\ (0;\ 6;\ 0)$, $D\ (2;\ 0;\ 0)$. Por lo tanto $\overrightarrow{CA} = (4;\ -6;\ 0)$, $\overrightarrow{DB} = (-2;\ 0;\ 3)$.

Hagamos uso de la fórmula (1):

$$\cos\varphi = \frac{|4\cdot(-2)+(-6)\cdot 0+0\cdot 3|}{\sqrt{16+36+0}\ \sqrt{4+0+9}} = \frac{4}{13}.$$

Por la tabla de los cosenos determinamos, que el ángulo entre las rectas CA y DB es igual, aproximadamente, a 72°. ▲

§ 70. Condiciones de paralelismo y perpendicularidad de dos rectas

Las rectas con los vectores directores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$:

a) son paralelas si, y sólo si, los vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ son colineales;

b) son perpendiculares cuando y sólo cuando los vectores **a** y **b** son perpendiculares, es decir, cuando $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 0$.

De aquí obtenemos las condiciones necesarias y suficientes de paralelismo y perpendicularidad de dos rectas, definidas por las ecuaciones canónicas.

Para que las rectas

$$\frac{x-x_1}{a_1}=\frac{y-y_1}{a_2}=\frac{z-z_1}{a_3} \quad \text{y} \quad \frac{x-x_2}{b_1}=\frac{y-y_2}{b_2}=\frac{z-z_2}{b_3}$$

sean paralelas, es necesario y suficiente que se cumpla la condición

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}. \tag{1}$$

En caso de que cualquiera de los números b_1, b_2, b_3 sea igual a cero, deberá anularse también el número que le corresponda a_1, a_2, a_3.

Para que las rectas sean perpendiculares es necesario y suficiente que se cumpla la condición

$$a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0. \tag{2}$$

Problema 1. Entre los siguientes pares de rectas señálense los pares de rectas paralelas y perpendiculares:

a) $\frac{x-0,3}{2}=\frac{y+5}{4}=\frac{z-1}{-13}$ y $\frac{x+1}{3}=\frac{y-4}{5}=\frac{z+2}{2}$;

b) $\begin{cases} 2x-3y+8=0, \\ 4x-2y-2z+1=0 \end{cases}$ y $\frac{x-7}{3}=\frac{y-2}{4}=\frac{z}{4}$;

c) $\begin{cases} x=2+2t, \\ y=4+3t, \\ z=4+t \end{cases}$ y $\begin{cases} 2x+y-5=0, \\ 3y-2z+9=0. \end{cases}$

a) Es evidente que los vectores directores $\boldsymbol{a}=(2;\ 4;\ -13)$ y $\boldsymbol{b}=(3;\ 5;\ 2)$ no son colineales. Por consiguiente, las rectas no son paralelas. Comprobemos la condición de perpendicularidad

$$a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=2\cdot3+4\cdot5-13\cdot2=0.$$

Las rectas son perpendiculares.

b) El vector director de la segunda recta tiene las coordenadas $\boldsymbol{b}=(3;\ 2;\ 4)$. Por vector director de la primera

recta se puede tomar el producto vectorial de los vectores normales $n_1 = (2; -3; 0)$ y $n_2 = (4; -2 -2)$ de los planos que definen esta recta:

$$a = [n_1; n_2] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -3 & 0 \\ 4 & -2 & -2 \end{vmatrix} = 6i + 4j + 8k.$$

La condición (1) se cumple, ya que $\frac{6}{3} = \frac{4}{2} = \frac{8}{4}$. Las rectas son paralelas.

c) El vector director de la primera recta tiene las coordenadas $a = (2; 3; 1)$. Es fácil reducir las ecuaciones de la segunda recta a la forma canónica

$$\frac{x - \frac{5}{2}}{-\frac{1}{2}} = y = \frac{z - \frac{9}{2}}{\frac{3}{2}}.$$

Por consiguiente, $b = \left(-\frac{1}{2};\ 1;\ \frac{3}{2}\right)$.

Los vectores a y b no son paralelos. Tampoco son perpendiculares, ya que

$$a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 2\left(-\frac{1}{2}\right) + 3 + \frac{3}{2} \neq 0.$$

Las rectas dadas no son paralelas ni perpendiculares.

Problema 2. Hállese la ecuación de la recta que pasa por el punto $M_0\ (2; -3; 4)$ perpendicularmente a las rectas

$$\frac{x+2}{1} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+1}{1} \quad \text{y} \quad \frac{x+4}{2} = \frac{y-0}{1} = \frac{z-4}{3}.$$

△ Sea que el vector $(a; b; c)$ es el vector director de la recta buscada. Entonces sus ecuaciones tienen la forma

$$\frac{x-2}{a} = \frac{y+3}{b} = \frac{z-4}{c}.$$

Utilizando la condición (2) de perpendicularidad de las rectas, obtendremos un sistema de dos ecuaciones respecto a las incógnitas a, b y c:

$$\begin{cases} a - b + c = 0, \\ 2a + b + 3c = 0. \end{cases}$$

Este sistema se resuelve fácilmente. Su solución es

$$\left(-\frac{4c}{3};\ -\frac{c}{3};\ c\right),$$

donde c es un número arbitrario. Por consiguiente, la ecuación de la recta buscada tiene la forma

$$\frac{x-2}{-\frac{4c}{3}}=\frac{y+3}{-\frac{c}{3}}=\frac{z-4}{c},$$

$c \neq 0$. De donde

$$\frac{x-2}{4}=\frac{y+3}{1}=\frac{z-4}{-3}. \ \blacktriangle$$

§ 71. Rectas cruzadas. Condición de pertenencia de dos rectas a un mismo plano

Como se sabe (46), las rectas l_1 y l_2 se denominan cruzadas, si no están situadas en un mismo plano. Sea que $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ son vectores directores de estas rectas, y los puntos M_1 y M_2 pertenecen a las rectas l_1 y l_2 (fig. 208) respectivamente. Entonces, los vectores $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\overrightarrow{M_1M_2}$ no son coplanares, y, por lo tanto, su producto mixto no es igual a cero, es decir, $(\boldsymbol{a};\ \boldsymbol{b};\ \overrightarrow{M_1M_2}) \neq 0$.

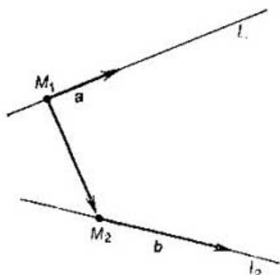


Fig. 208

También es válida la afirmación inversa: si $(\boldsymbol{a};\ \boldsymbol{b};\ \overrightarrow{M_1M_2}) \neq 0$, los vectores $\boldsymbol{a};\boldsymbol{b};\ \overrightarrow{M_1M_2}$ no son coplanares, y, por consiguiente, las rectas l_1 y l_2 no están situadas en un mismo plano, es decir, se cruzan. Así pues, dos rectas se cruzan cuando y sólo cuando se cumple la condición

$$(\boldsymbol{a};\ \boldsymbol{b};\ \overrightarrow{M_1M_2}) \neq 0, \qquad (1)$$

donde $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ son vectores directores de las rectas, y M_1 y M_2 son puntos pertenecientes a las rectas dadas respectivamente.

La condición

$$(a;\ b;\ \overrightarrow{M_1M_2}) = 0 \qquad (2)$$

es la condición necesaria y suficiente para que las rectas se sitúen en un mismo plano. Si las rectas están definidas por sus ecuaciones canónicas

$$\frac{x-x_1}{a_1}=\frac{y-y_1}{a_2}=\frac{z-z_1}{a_3} \quad \text{y} \quad \frac{x-x_2}{b_1}=\frac{y-y_2}{b_2}=\frac{z-z_2}{b_3},$$

entonces $a = (a_1;\ a_2;\ a_3)$, $b = (b_1;\ b_2;\ b_3)$, $M_1\,(x_1;\ y_1;\ z_1)$, $M_2\,(x_2;\ y_2;\ z_2)$ y la condición (2) se escribe del modo siguiente:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (3)$$

Problema. Analícese la situación recíproca de las rectas:

a) $\frac{x-2}{2}=\frac{y-4}{3}=\frac{z-4}{1}$ y $\frac{x-3}{-1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-3}{3}$;

b) $\begin{cases} x=3+2t, \\ y=3-8t, \\ z=7+4t \end{cases}$ y $\begin{cases} x=2-t, \\ y=5+t, \\ z=7+t; \end{cases}$

c) $\begin{cases} x+y+z-1=0, \\ 5x+y-z+17=0 \end{cases}$ y $\frac{x-4}{1}=\frac{y-2}{-3}=\frac{z-8}{2}$.

△ a) En el caso dado $a = (2;\ 3;\ 1)$, $b = (-1;\ 2;\ 3)$, $M_1\,(2;\ 4;\ 4)$, $M_2\,(3;\ -1;\ 3)$. Comprobamos la condición (3):

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & -5 & -1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -5 & -1 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + \\ + \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} = 26+6+3 \neq 0.$$

Por consiguiente, las rectas dadas se cruzan.

b) Los vectores directores de las rectas tienen las coordenadas $a = (2;\ -8;\ 4)$, $b = (-1;\ 1;\ 1)$. La primera recta

pasa por el punto M_1 (3; 3; 7), la segunda recta, por el punto M_2 (2; 5; 7). Comprobemos la condición (3):

$$\begin{vmatrix} 2 & -8 & 4 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + 8\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= -4+8-4=0.$$

Las rectas dadas están situadas en un mismo plano. Los vectores directores de las rectas son, evidentemente, no colineales. Por consiguiente, las rectas se cruzan.

c) Tomemos por vector director de la primera recta el producto vectorial de los vectores $\boldsymbol{n}_1 = (1;\ 1;\ 1)$ y $\boldsymbol{n}_2 = (5;\ 1;\ -1)$, es decir, de los vectores normales de los planos que definen la primera recta:

$$\boldsymbol{a} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \boldsymbol{i}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - \boldsymbol{j}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} + \boldsymbol{k}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= -2\boldsymbol{i}+6\boldsymbol{j}-4\boldsymbol{k}.$$

De la ecuación de la segunda recta vemos que $\boldsymbol{b} = (1;\ -3;\ 2)$. Los vectores directores de las rectas dadas son colineales, ya que $\frac{-2}{1} = \frac{6}{-3} = \frac{-4}{2}$. Por consiguiente, las rectas dadas son paralelas. Puesto que el punto M_3 (4; 2; 8) perteneciente a la segunda recta no satisface las ecuaciones de la primera recta, las rectas dadas no coinciden. ▲

§ 72. Cálculo del ángulo entre una recta y un plano. Condiciones de paralelismo y perpendicularidad de una recta y un plano

Examinemos la recta l con el vector director $\boldsymbol{a}$ y el plano p con el vector normal $\boldsymbol{n}$. Designemos con φ el ángulo entre la recta l y el plano p, y con ψ, el ángulo entre los vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{n}$. Es fácil ver que $\varphi = 90° - \psi$, si $\psi \leqslant 90°$ (fig. 209, *a*) y $\varphi = \psi - 90°$, si $\psi > 90°$ (fig. 209, *b*). En ambos casos es válida la igualdad $\operatorname{sen} \varphi = |\cos \psi|$.

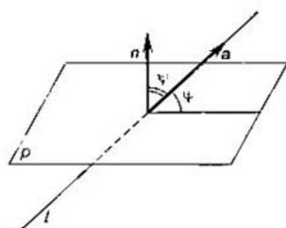
Por la fórmula (1) del § 20 hallamos

$$\cos \psi = \cos (\widehat{\boldsymbol{a};\ \boldsymbol{n}}) = \frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{n}|},$$

y, por consiguiente,

$$\operatorname{sen} \varphi = \frac{|\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{n}|}.$$

Si son conocidas las coordenadas cartesianas rectangulares del vector director de la recta y del vector normal del



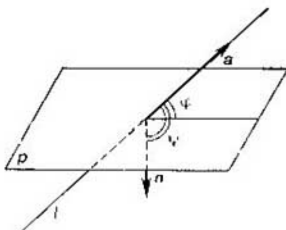


Fig. 209

plano $\boldsymbol{a} = (a_1;\ a_2;\ a_3)$ y $\boldsymbol{n} = (A;\ B;\ C)$, entonces el ángulo φ puede ser calculado con ayuda de la fórmula

$$\operatorname{sen} \varphi = \frac{|a_1A + a_2B + a_3C|}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\ \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \qquad (1)$$

Problema 1. Calcúlese el ángulo entre la recta y el plano:

a) $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z-7}{-1}$ y $4x + y + z + 13 = 0$;

b) $\begin{cases} x = 2 - 3t, \\ y = 1 - t, \\ z = -4t \end{cases}$ y $x + 2y - z + 1 = 0$,

c) $\begin{cases} 3x - 2y + z + 1 = 0, \\ 4x - 3y + 4z = 0 \end{cases}$ y $2x - y - 2z + 5 = 0$.

△ a) En el caso dado $\boldsymbol{a} = (2;\ 2;\ -1)$, $\boldsymbol{n} = (4;\ 1;\ 1)$. Por la fórmula (1) calculamos el seno del ángulo buscado:

$$\operatorname{sen} \varphi = \frac{|2 \cdot 4 + 2 \cdot 1 - 1 \cdot 1|}{\sqrt{4+4+1}\ \sqrt{16+1+1}} = \frac{9}{3\sqrt{18}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

El ángulo entre la recta y el plano es igual a 45°.
b) Puesto que $\boldsymbol{a} = (-3;\ -1;\ -4)$ y $\boldsymbol{n} = (1;\ 2;\ -1)$,

entonces

$$\operatorname{sen} \varphi = \frac{|-3-2+4|}{\sqrt{9+1+16}\,\sqrt{1+4+1}} = \frac{1}{\sqrt{26}\,\sqrt{6}} = \frac{1}{2\sqrt{39}} \approx 0{,}08.$$

Por la tabla de senos hallamos que $\varphi \approx 5°$.

c) Tomemos por vector director de la recta el producto vectorial de los vectores normales $\boldsymbol{n}_1 = (3; -2; 1)$ 1) $\boldsymbol{n}_2 = (4; -3; 4)$ de los planos que definen la recta. Hallemos sus coordenadas:

$$\boldsymbol{a} = [\boldsymbol{n}_1; \boldsymbol{n}_2] = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 3 & -2 & 1 \\ 4 & -3 & 4 \end{vmatrix} = -5\boldsymbol{i} - 8\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}.$$

Las coordenadas del vector normal del plano dado las hallamos de su ecuación $\boldsymbol{n} = (2; -1; -2)$. Por la fórmula (1) calculamos el seno del ángulo buscado:

$$\operatorname{sen} \varphi = \frac{|-10+8+2|}{\sqrt{25+64+1}\,\sqrt{4+1+4}} = 0.$$

El ángulo entre la recta y el plano es igual a cero. ▲

La recta con el vector director $\boldsymbol{a}$ y el plano con el vector normal $\boldsymbol{n}$ son paralelas si, y sólo si, los vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{n}$ son

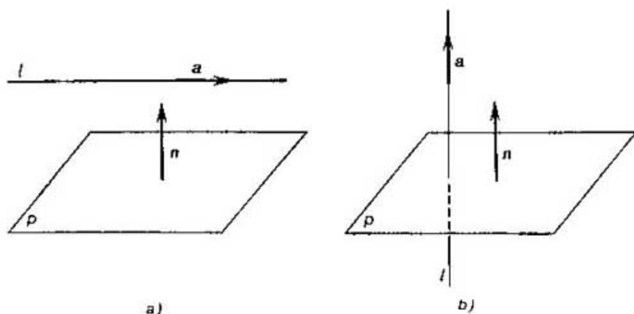


Fig. 210

perpendiculares (fig. 210, *a*). Es evidente, que para que la recta y el plano sean perpendiculares, es necesario y suficiente que los vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{n}$ sean colineales (fig. 210, *b*).

Si la recta y el plano están definidos por las ecuaciones

$$\frac{x-x_1}{a_1}=\frac{y-y_1}{a_2}=\frac{z-z_1}{a_3} \quad \text{y} \quad Ax+By+Cz+D=0,$$

ellos son:

a) paralelos si, y sólo si,

$$a_1A + a_2B + a_3C = 0; \tag{2}$$

b) perpendiculares cuando y sólo cuando

$$\frac{a_1}{A}=\frac{a_2}{B}=\frac{a_3}{C}.$$

La recta está situada en el plano si, y sólo si, en primer lugar, es paralela al plano y, en segundo lugar, por lo menos, un punto suyo pertenece al plano. Por lo tanto, la condición necesaria y suficiente de pertenencia de la recta $\frac{x-x_1}{a_1}=\frac{y-y_1}{a_2}=\frac{z-z_1}{a_3}$ al plano $Ax+By+Cz+D=0$ consiste en el cumplimiento de las dos igualdades siguientes:
$a_1A + a_2B + a_3C = 0$ y $Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0$. (4)

Problema 2. Entre los siguientes pares de rectas y planos indíquense los paralelos o perpendiculares; en caso de intersecarse una recta y un plano, hállese el punto de intersección:

a) $\frac{x-1}{3}=\frac{y+2}{3}=\frac{z}{-5}$ y $7x-2y+3z-1=0$;

b) $\frac{x}{2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-1}{4}$ y $x-y+z-3=0$;

c) $\begin{cases} 6x+3y-2z-21=0, \\ 6x+y+2z-31=0 \end{cases}$ y $2x-6y-3z-91=0$.

△ a) El vector director de la recta tiene las coordenadas $\boldsymbol{a}=(3;\ 3;\ -5)$, el vector normal del plano, $\boldsymbol{n}=(7;\ -2;\ 3)$. Es evidente, que los vectores son no colineales; por consiguiente, la recta no es perpendicular al plano. Comprobemos la condición (2) de paralelismo de la recta y el plano

$$a_1A + a_2B + a_3C = 3\cdot 7 - 3\cdot 2 - 5\cdot 3 = 0.$$

La condición se cumple. La recta y el plano dados son paralelos.

b) En el caso dado $\boldsymbol{a} = (2;\ 3;\ 4)$ y $\boldsymbol{n} = (1;\ -1;\ 1)$. Los vectores no son colineales, por eso la condición (3) no se cumple. Comprobemos la condición (2) de paralelismo de la recta y el plano:

$$a_1A + A_2B + a_3C = 2 \cdot 1 - 3 \cdot 1 + 4 \cdot 1 \neq 0.$$

La condición no se cumple. La recta y el plano no son paralelos y, por consiguiente, se cortan. Para determinar las coordenadas del punto de intersección es necesario resolver un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{2} = \dfrac{y-1}{3} = \dfrac{z-1}{4}, \\ x - y + z - 3 = 0. \end{cases}$$

Tal sistema es fácil resolver, escribiendo previamente las ecuaciones de la recta en forma paramétrica:

$$\begin{cases} x = 2t, \\ y = 1 + 3t \\ z = 1 + 4t. \end{cases}$$

Sustituyendo los valores x, y y z en la ecuación del plano, obtendremos

$$2t - (1 + 3t) + 1 + 4t - 3 = 0,$$

de donde $t = 1$ y, por lo tanto, $x = 2$, $y = 4$, $z = 5$. La recta y el plano se intersecan en el punto $(2;\ 4;\ 5)$.

c) Tomemos por vector director de la recta el producto vectorial de los vectores $\boldsymbol{n}_1 = (6;\ 3;\ -2)$ y $\boldsymbol{n}_2 = (6;\ 1;\ 2)$, es decir, de los vectores normales que definen la recta dada. Hallemos sus coordenadas:

$$\boldsymbol{a} = [\boldsymbol{n}_1;\ \boldsymbol{n}_2] = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 6 & 3 & -2 \\ 6 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 8\boldsymbol{i} - 24\boldsymbol{j} - 12\boldsymbol{k}.$$

El vector normal $\boldsymbol{n}$ del plano dado tiene las coordenadas $(2;\ -6;\ -3)$. La condición (3) de perpendicularidad de la recta y del plano está cumplida, ya que

$$\frac{8}{2} = \frac{-24}{-6} = \frac{-12}{-3}.$$

La recta y el plano dados son perpendiculares. Para determinar el punto de intersección de la recta y del plano escribamos la ecuación de la recta en la forma paramétrica. El vector director de la recta ya está hallado, es el vector $\boldsymbol{a} = (8;\ -24;\ -12)$ o el vector colineal a él $(2;\ -6;\ -3)$. Nos resta hallar un punto cualquiera de la recta. Consideramos que $x = 0$, entonces

$$\begin{cases} 3y - 2z = 21, \\ y + 2z = 31, \end{cases}$$

de donde $y = 13$, $z = 9$. El punto $(0;\ 13;\ 9)$ pertenece a la recta. Por consiguiente, las ecuaciones paramétricas de la recta tienen la forma

$$\begin{cases} x = 2t, \\ y = 13 - 6t, \\ z = 9 - 3t. \end{cases}$$

Sustituyendo los valores x, y y z en la ecuación del plano, obtendremos

$$4t - 6\,(13 - 6t) - 3\,(9 - 3t) - 91 = 0$$

o $49t = 196$, $t = 4$. El punto de la recta, que se obtiene para un valor del parámetro $t = 4$, pertenece al plano. La recta y el plano se cortan en el punto $(8;\ -11;\ -3)$. ▲

Problema 3. ¿Para qué valores C y D la recta $\frac{x+2}{-2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-3}{2}$ pertenece al plano $x + 2y + Cz + D = 0$?

△ En el caso dado las condiciones (4) de pertenencia de la recta al plano tienen la forma:

$$-2\cdot 1 + 3\cdot 2 + 2\cdot C = 0, \qquad -2 + 2\cdot 1 + 3\cdot C + D = 0.$$

Por consiguiente, $C = -2$ y $D = 6$. ▲

Problema 4. Hállese la ecuación del plano que pasa por el punto $M_0\,(4;\ -3;\ 1)$ paralelamente a las rectas:

$$\frac{x}{6} = \frac{y}{2} = \frac{z}{-3} \quad \text{y} \quad \frac{x+1}{5} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-4}{2}.$$

△ La ecuación del plano que pasa por el punto dado M_0 tiene la forma

$$A\,(x - 4) + B\,(y + 3) + C\,(z - 1) = 0.$$

Este plano será paralelo a las rectas dadas si, y sólo si, para cada una de las rectas está cumplida la condición (2) de paralelismo de la recta y del plano. Por lo tanto, para determinar los coeficientes A, B y C tenemos dos ecuaciones

$$6A + 2B - 3C = 0,$$
$$5A + 4B + 2C = 0,$$

de las cuales hallamos fácilmente: $A = \frac{8}{7}C$, $B = -\frac{27}{14}C$.

$$\frac{x}{6} = \frac{y}{2} = \frac{z}{-3} \quad \text{y} \quad \frac{x+1}{5} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-4}{2}.$$

La ecuación buscada del plano será la ecuación

$$\frac{8}{7}C(x-4) - \frac{27}{14}C(y+3) + C(z-1) = 0 \quad C \neq 0,$$

ó $16x - 27y + 14z - 159 = 0$. ▲

Problema 5. Hállense las ecuaciones canónicas de la recta que pasa por el punto M_0 (—5; 0; 8) y es perpendicular al plano $2x - 3y + 5z = 0$.

△ Las ecuaciones de la recta que pasa por el punto dado M_0 tienen la forma

$$\frac{x+5}{a_1} = \frac{y}{a_2} = \frac{z-8}{a_3}.$$

Esta recta será perpendicular al plano dado cuando y sólo cuando esté cumplida la condición (3) de perpendicularidad de la recta y el plano:

$$\frac{a_1}{2} = \frac{a_2}{-3} = \frac{a_3}{5},$$

es decir, cuando el vector $\boldsymbol{n} = (2; -3; 5)$ es el vector director de la recta. Por consiguiente, la ecuación buscada tiene la forma

$$\frac{x+5}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z-8}{5}. \quad ▲$$

Problema 6. Hállense las ecuaciones de proyección de la recta

$$\frac{x-1}{9} = \frac{y+1}{-4} = \frac{z}{-7}$$

sobre el plano

$$2x - y - 3z + 6 = 0.$$

△ La proyección de la recta sobre el plano es la recta de intersección de dos planos: del plano dado y del plano que es perpendicular al dado y atraviesa la recta dada. Por lo tanto, para resolver el problema es suficiente hallar la ecuación del plano que contiene la recta dada y es perpendicular al plano dado. Sea que

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

es la ecuación del plano dado. Entonces, de la condición de perpendicularidad de los planos obtenemos la ecuación

$$2A - B - 3C = 0,$$

y de la condición (4) de pertenencia de la recta al plano, las ecuaciones

$$9A - 4B - 7C = 0 \text{ y } A - B + D = 0.$$

De las ecuaciones obtenidas se deduce que:

$$A = -5C, \quad B = -13C, \quad D = -8C.$$

Así pues, la ecuación del plano que es perpendicular al plano dado y que pasa por la recta dada será la ecuación

$$-5Cx - 13Cy + Cz - 8C = 0, \qquad C \neq 0,$$

ó $5x + 13y - z + 8 = 0$.

La proyección buscada es la intersección del plano dado y el hallado. Por consiguiente, sus ecuaciones son

$$\begin{cases} 5x + 13y - z + 8 = 0, \\ 2x - y - 3z + 6 = 0. \end{cases} \blacktriangle$$

Problemas para el capítulo V

5.1. Se da el paralelepípedo $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Escríbanse por medio de los vectores $\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{r}_1$, $\overrightarrow{AD} = \boldsymbol{r}_2$, $\overrightarrow{AA_1} = \boldsymbol{r}_3$ las ecuaciones vectoriales paramétricas de las rectas: a) AC_1; b) CA_1; c) BD_1; d) DB_1; e) CD_1.

5.2. Escríbanse las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el punto M_0 y que tiene un vector director $\boldsymbol{a}$, si:

a) $M_0(1;\ 2;\ 3)$ $\qquad \boldsymbol{a}(2;\ -2;\ 1)$;

b) $M_0(3;\ -2;\ 0)$, $\qquad \boldsymbol{a}(1;\ -1;\ \sqrt{2})$;

c) $M_0\left(\frac{1}{2};\ \frac{1}{3};\ \frac{1}{4}\right)$, $\qquad \boldsymbol{a}(0;\ 3;\ 5)$.

5.3. Escríbanse las ecuaciones canónicas de la recta que pasa por el punto M_0 y que tiene un vector director $\boldsymbol{a}$, si:

a) $M_0(-2;\ 0;\ 1)$, $\boldsymbol{a}(2;\ -3;\ 4)$;

b) $M_0(2;\ -1;\ 0)$, $\boldsymbol{a}(\sqrt{3};\ \sqrt{2};\ 1)$;

c) $M_0(3;\ 0;\ -3)$, $\boldsymbol{a}(0;\ 1;\ 0)$.

5.4. Escríbanse las ecuaciones canónicas de la recta que pasa por los puntos M_1 y M_2, si:

a) $M_1(3;\ -1;\ 0)$, $M_2(-2;\ -5;\ 4)$;

b) $M_1(1;\ -1;\ 4)$, $M_2(4;\ -1;\ 2)$;

c) $M_1(0;\ 1;\ -5)$, $M_2(-2;\ 1;\ -5)$.

5.5. Se da un triángulo con los vértices en los puntos $A(1;\ -2;\ -4)$, $B(1;\ 6;\ -8)$, $C(-7;\ 11;\ 6)$. El segmento CM es la mediana del triángulo. Escríbanse las ecuaciones paramétricas y canónicas de la recta CM.

5.6. Hágase la ecuación del plano que atraviesa los puntos M_1, M_2, M_3, si:

a) $M_1(-2;\ 3;\ 5)$, $M_2(4;\ -3;\ 0)$, $M_3(0;\ 6;\ -5)$;

b) $M_1(2;\ 0;\ 4)$, $M_2(3;\ 1;\ -2)$, $M_3(0;\ -3;\ -1)$;

c) $M_1(3;\ 1;\ -5)$, $M_2(8;\ 3;\ 3)$, $M_3(-2;\ -1;\ 4)$.

Escríbase para cada plano la ecuación segmentaria.

5.7. Escríbase la ecuación del plano que atraviesa el punto M_0 y es perpendicular al vector $\boldsymbol{n}$, si:

a) $M_0(2;\ 3;\ 5)$, $\boldsymbol{n} = (4;\ 6;\ 0)$;

b) $M_0(3;\ -5;\ -2)$, $\boldsymbol{n} = (4;\ -6;\ 1)$;

c) $M_0(0,\ 0;\ 0)$, $\boldsymbol{n} = (0;\ -7;\ 4)$;

d) $M_0(1,\ 2,\ 3)$, $\boldsymbol{n} = (0;\ 1;\ 0)$.

5.8. Escríbase la ecuación del plano que atraviesa el punto M_0 y es paralelo al plano dado, si:

a) $M_0(1,\ -5,\ 4)$ $\quad 4x-7z+6=0$;

b) $M_0(3,\ 4,\ -11)$, $\quad z=0$;

c) $M_0(2,\ -1,\ 3)$, $\quad \frac{x}{2}-\frac{y}{7}+\frac{z}{2}=1$.

5.9. Hállese la ecuación del plano que pasa por el punto $M_0(1;\ 2;\ 4)$ y el eje de las abscisas.

5.10. Hállese la ecuación del plano que pasa por los puntos $M_1(2;\ -1;\ 1)$ y $M_2(0;\ 1;\ 2)$ paralelamente al eje de ordenadas.

5.11. Calcúlese el área del triángulo que se corta del ángulo de coordenadas yOz por el plano $2x-3y+6z-24=0$.

5.12. Calcúlese el ángulo entre los planos:

a) $x-4y-8z+1=0$ y $x+20y+7z=0$;

b) $6x+3y-2z-7=0$ y $x+2y+6z-5=0$;

c) $8x+4y+z=0$ y $2x-2y+z+13=0$;

d) $x-z-7=0$ y $y-z+5=0$.

5.13. Determínese, cuáles de los siguientes pares de los planos son paralelos, perpendiculares o coinciden:

a) $2x+3y+4z-12=0$ y $6x+9y+12z-12=0$;

b) $3x+4y-z+1=0$ y $x-2y-5z+3=0$;

c) $2x+3y-4z=0$ y $2x+y+z-13=0$;

d) $10x-12y+6z-240=0$ y $\frac{x}{24}-\frac{y}{20}+\frac{z}{40}=1$.

5.14. Determínese, para qué valores k son perpendiculares los siguientes planos:

a) $3x + ky + 4z - 5 = 0$ y $4x - 3y + 4z + 2 = 0$;

b) $3x + 4y + kz - 6 = 0$ y $4x - 3y + 4z + 1 = 0$;

c) $kx + 4y + 3z - 4 = 0$ y $3y - 4z + 3 = 0$.

5.15. Determínese, para qué valores α y β son paralelos los planos siguientes:

a) $3x + \alpha y + 4z - 3 = 0$ y $4x - 3y + \beta z + 4 = 0$;

b) $3x + \alpha y + 4z - 2 = 0$ y $4x + \beta z + 5 = 0$;

c) $3x + y + \alpha z - 1 = 0$ y $6x + 2y + 10z + \beta = 0$.

5.16. Escríbase la ecuación del plano que pasa por los puntos M_1 (3; −2; 1) y M_2 (6; 0; 5) y es perpendicular al plano $x - y + 2z - 4 = 0$.

5.17. Hágase la ecuación del plano que pasa por el punto M_0(1; 2; 3) y es perpendicular a los planos $x - y + z - 7 = 0$, $3x + 2y - 12z + 5 = 0$.

5.18. Escríbase la ecuación del plano que pasa por el punto M_0 (3; −2; 1) perpendicularmente a los planos $3y - 5x + 1 = 0$, $x = 0$.

5.19. Escríbanse las ecuaciones canónicas de la recta de intersección de los planos $x - 2y + 3z - 4 = 0$ y $3x + 2y - 5z - 4 = 0$.

5.20. Hállense las ecuaciones canónicas de las rectas siguientes:

a) $\begin{cases} x+y-z+2=0, \\ 3x-1=0; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x-3=0, \\ y+5=0; \end{cases}$

c) $\begin{cases} x-y+2z=0, \\ 2x+3y-z=0; \end{cases}$ d) $\begin{cases} 3x+5y-6=0, \\ x-2y+3=0; \end{cases}$

e) $\begin{cases} y+2z=0, \\ 3y-z=0; \end{cases}$ f) $\begin{cases} 2y+z=0, \\ 3x-1=0. \end{cases}$

5.21. Hállense las ecuaciones canónicas de la rectas, formadas por la intersección del plano $2x - 3y - 4z + 11 = 0$ con los planos de coordenadas.

5.22. Hállense las ecuaciones paramétricas de la recta:

a) $\begin{cases} x-2y+3z-4=0, \\ 3y+2y-5z-4=0; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x-2y+3z+1=0; \\ 2x+y-4z-8=0. \end{cases}$

5.23. Hállese la ecuación del plano que pasa por la recta de intersección de los planos $2x - 3y + z - 3 = 0$, $x + 3y + 2z + 1 = 0$ y el punto M_0 (1; −2; 3).

5.24. Hállese la ecuación del plano que pasa por la recta de intersección de los planos $2x - y + 3z - 5 = 0$, $x + 2y - z + 2 = 0$ paralelamente al vector (2; −1; −2).

5.25. Normalícense las ecuaciones de los planos:

a) $3x - 6y + 2z + 21 = 0$;

b) $5x + 12y + 26 = 0$;

c) $2z + 13 = 0$.

5.26. Hállese la distancia del origen de coordenadas al plano:

a) $4x - 2y - 4z + 7 = 0$;

b) $15x + 16y - 12z - 100 = 0$;

c) $\sqrt{2}x + y - z + 32 = 0$.

5.27. Hállese la distancia de un punto a un plano:

a) M (1; 2; 4), $2x + 2y - z - 11 = 0$;

b) $M(7;\ 0;\ -7)$, $\quad 18x - 6y + 9z + 14 = 0$;

c) $M(\sqrt{5};\ \sqrt{12};\ 2)$ $\quad y\sqrt{3} + z + 20 = 0$.

5.28. Calcúlese la distancia del punto $M(0;\ 1;\ -3)$ al plano que pasa por los puntos $M_1(3;\ 1;\ -5)$, $M_2(8;\ 3;\ 3)$ $M_3(-2;\ -1;\ 4)$.

5.29. Calcúlese la distancia entre los planos paralelos:

a) $3x - 6y - 2z + 35 = 0$ y $6x - 12y - 4z - 5 = 0$;

b) $5x + 2y - 3z - 5 = 0$ y $10x + 4y - 6z + 5 = 0$;

c) $7x - y + \sqrt{2}z - 3\sqrt{2} = 0$ y $7\sqrt{2}x - \sqrt{2}y + 2z - 6 = 0$

5.30. Calcúlese el ángulo entre las rectas:

a) $\dfrac{x-3}{1} = \dfrac{y+2}{-1} = \dfrac{z}{\sqrt{2}}$ y $\dfrac{x+2}{1} = \dfrac{y-3}{1} = \dfrac{z+5}{\sqrt{2}}$;

b) $\begin{cases} x = 2t+1, \\ y = 3t-2, \\ z = -6t+1 \end{cases}$ y $\begin{cases} 2x+y-4z+2=0, \\ 4x-y-5z+4=0; \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x-4y+3z+1=0, \\ x-6y-6z+2=0 \end{cases}$ y $\begin{cases} x-2z-3=0, \\ x+2y+2z+9=0. \end{cases}$

5.31. Determínese, cuáles de los siguientes pares de rectas son paralelas y cuáles son perpendiculares:

a) $\dfrac{x-2}{4} = \dfrac{y+1}{-3} = \dfrac{z-1}{-2}$ y $\dfrac{x-7}{5} = \dfrac{y-1}{6} = \dfrac{z-3}{1}$;

b) $\begin{cases} x = t, \\ y = -4t, \\ z = -3t \end{cases}$ y $\begin{cases} x = t, \\ y = -8-4t, \\ z = -3-3t; \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x-2z-7=0, \\ x+y-3z+5=0 \end{cases}$ y $\begin{cases} x+2y-5z=0, \\ x-2y+3z-13=0; \end{cases}$

d) $\begin{cases} x-4z=0, \\ 2x-y-9z+2=0 \end{cases}$ y $\begin{cases} 3y+3z-11=0, \\ 2x-2y-z+11=0. \end{cases}$

5.32. Se dan las rectas

$$\frac{x+2}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z-1}{4}, \quad \frac{x-3}{\alpha} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-7}{2};$$

para qué valor α son perpendiculares.

5.33. Hállense las ecuaciones canónicas de la recta que está situada en el plano yOz, que pasa por el origen de coordenadas perpendicularmente a la recta $\dfrac{x-13}{8} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z-4}{3}$.

5.34. Hállense las ecuaciones canónicas de la recta que pasa por el punto $M_0(2;\ -3;\ 4)$ perpendicularmente a las rectas

$$\frac{x-0}{1} = \frac{y-0}{1} = \frac{z+5}{1}, \quad \frac{x-8}{3} = \frac{y+4}{-2} = \frac{z-2}{1}.$$

5.35. Determínese, si están situadas en un mismo plano las rectas siguientes:

a) $\frac{x+1}{3}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{2}$ y $\frac{x+49}{48}=\frac{y+37}{37}=\frac{z}{4}$;

b) $\frac{x-10}{11}=\frac{y+1}{-4}=\frac{z}{-13}$ y $\begin{cases} x=-2+3t, \\ y=-1, \\ z=4-t; \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x-3z+2=0; \\ 2y-z-6=0 \end{cases}$ y $\begin{cases} x-12z+49=0, \\ 4y-37z+148=0; \end{cases}$

d) $\begin{cases} x=3z-1, \\ y=-5z+7 \end{cases}$ y $\begin{cases} y=2x-5, \\ z=7x+2. \end{cases}$

5.36. Determínese si se intersecan las rectas siguientes:

a) $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z}{-1}$ y $\frac{x}{-2}=\frac{y+5}{3}=\frac{z-4}{1}$;

b) $\frac{x-4}{-6}=\frac{y+4}{4}=\frac{z}{-2}$ y $\frac{x+2}{3}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z}{1}$.

5.37. Determínese si las rectas dadas son cruzadas:

a) $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z}{-1}$ y $\frac{x}{-2}=\frac{y+5}{3}=\frac{z-4}{1}$;

b) $\begin{cases} x+2y-5z-1=0, \\ x-2y+3z-9=0 \end{cases}$ y $\begin{cases} x+y-3z+1=0; \\ x-y+z+3=0. \end{cases}$

5.38. Calcúlese el ángulo entre la recta y el plano:

a) $\frac{x+2}{2}=\frac{y-3}{-2}=\frac{z+5}{0}$ y $y+z+7=0$;

b) $\begin{cases} x=7+5t, \\ y=4+t, \\ z=5+4t \end{cases}$ y $3x-y+2z-5=0$;

c) $\begin{cases} 7x-5y+5z-11=0, \\ x-y+3z+7=0 \end{cases}$ $6x-3y-6z+13=0$.

5.39. Analícese la situación recíproca de los siguientes pares de rectas y planos (en caso de intersección de la recta y el plano, hállese el punto de intersección):

a) $\frac{x+7}{3}=\frac{y+10}{-4}=\frac{z+3}{1}$ y $y+4z+1=0$;

b) $\begin{cases} 3x-2y+z+3=0, \\ 4x-3y+4z+1=0 \end{cases}$ y $2x-y-2z-8=0$;

c) $\begin{cases} x=12+4t, \\ y=9+3t, \\ z=1+t \end{cases}$ y $3x+5y-z-2=0$;

d) $\frac{x-2}{4}=\frac{y-7}{3}=\frac{z-5}{1}$ y $4x+3y+z-8=0$;

e) $\frac{x-2}{-1}=\frac{y+1}{4}=\frac{z+5}{2}$ y $4x+y-7=0$.

5.40. Hállese la ecuación de la recta que pasa por el punto $M_0\,(2;\ 0;\ -1)$ perpendicularmente al plano $2x+3y-z+7=0$.

5.41. Hállese la ecuación del plano que pasa por el punto $M_0\,(7;\ 9;\ 11)$ perpendicularmente a la recta $\frac{x}{11}=\frac{y}{9}=\frac{z}{7}$.

5.42. ¿Para qué valores de α y β la recta $\frac{x+\alpha}{8}=\frac{y-1}{\beta}=\frac{z-4}{3}$ pertenece al plano $x-2y-4z+1=0$?

5.43. Hállese la ecuación de la proyección de la recta $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z-2}{2}$ sobre el plano $3x+2y-z-5=0$.

5.44. Hállense las ecuaciones canónicas de las proyecciones de la recta

$$\begin{cases} 3x-2y-z-2=0, \\ x+4y-5z-10=0 \end{cases}$$

sobre los planos de coordenadas.

Capítulo VI

SUPERFICIES CURVILÍNEAS ELEMENTALES Y CUERPOS DE REVOLUCIÓN

§ 73. La esfera y el cuerpo esférico

Se denomina *esfera de radio R con centro en el punto C* (fig. 211) el conjunto de todos los puntos del espacio que se encuentran a la distancia dada R de un punto fijo C.

Con otras palabras la esfera de radio R con centro en el punto C es un conjunto de todos los puntos M del espacio que satisfacen la condición

$$|CM| = R. \qquad (1)$$

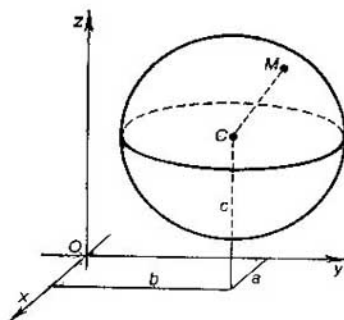


Fig. 211

Se denomina *diámetro de la esfera* el segmento que une dos puntos de ésta y pasa por su centro. Es evidente que la longitud del diámetro de la esfera de radio R es igual a $2R$.

Si en el espacio está definido un cierto sistema cartesiano rectangular de coordenadas y $(a;\ b;\ c)$ son las coordenadas del punto C, y $(x;\ y;\ z)$ son las coordenadas del punto M, entonces la condición (1) toma la forma

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2} = R.$$

De aquí se deduce que la esfera de radio R con el centro en el punto C $(a;\ b;\ c)$ tiene la ecuación

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2 = R^2. \qquad (2)$$

En particular, la esfera de radio R con el centro en el origen de coordenadas tiene la ecuación

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2. \qquad (3)$$

Problema 1. Hágase la ecuación de la esfera de radio $R = 5$ con el centro en el origen de coordenadas.

△ Sustituyendo directamente en la ecuación (3) el valor del radio obtendremos

$$x^2 + y^2 + z^2 = 25. \ ▲$$

Problema 2. Escríbase la ecuación de la esfera con centro en el punto C (2; —3; 5) y radio igual a 6.

△ Sustituyendo el valor de las coordenadas del punto C y el valor del radio en la ecuación (2), obtendremos

$$(x-2)^2 + (y+3)^2 + (z-5)^2 = 36. \ ▲$$

Problema 3. Hállese el centro y el radio de la esfera

$$(x+4)^2 + (y-3)^2 + z^2 = 100.$$

△ Comparando la ecuación dada con la ecuación de la esfera (2) vemos, que $a = -4$, $b = 3$, $c = 0$, $R = 10$. Por consiguiente, C (—4; 3; 0), $R = 10$. ▲

Problema 4. Demuéstrese que la ecuación

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z + 5 = 0$$

es la ecuación de la esfera.

△ Transformemos el primer miembro de la ecuación dada formando los cuadrados de los binomios que contienen x, y y z respectivamente:

$$x^2 - 2x + y^2 + 4y + z^2 - 6z + 5 = (x-1)^2 - 1 + \\ + (y+2)^2 - 4 + (z-3)^2 - 9 + 5 = (x-1)^2 + (y+2)^2 + \\ + (z-3)^2 - 9.$$

Por consiguiente, la superficie dada tiene la ecuación

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 9.$$

Esta ecuación representa una ecuación de la esfera con centro en el punto C (1; —2; 3) y radio $R = 3$. ▲

Se denomina *cuerpo esférico* (*globo*) *de radio R con centro en el punto C* el conjunto de todos los puntos del espacio, cuya distancia del punto fijo C no sobrepasa el número dado R.

Con otras palabras, el cuerpo esférico de radio R con centro en el punto C es el conjunto de todos los puntos M del espacio que satisfacen la condición

$$|CM| \leqslant R.$$

En coordenadas esta condición tiene la forma

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2 \leqslant R^2.$$

La esfera de radio R con centro en el punto C se denomina *superficie esférica*. Al respecto se dice que ella limita el globo de radio R con centro en el punto C.

Teorema. *A través de cuatro puntos cualesquiera no situados en un mismo plano pasa una sola esfera.*

□ Sea que A, B, D, E son cuatro puntos que no están situados en un mismo plano. Es suficiente demostrar que existe un solo punto C equidistante de los cuatro puntos dados. Es evidente, que el punto C será el centro de la esfera que pasa por los puntos dados.

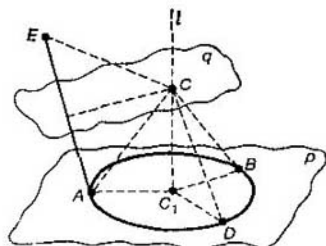


Fig. 212

Por los puntos A, B, D que, evidentemente, no están situados en una misma recta, pasa un solo plano p y una sola circunferencia. Sea que C_1 es el centro de esta circunferencia. Está claro, que el conjunto de todos los puntos del espacio equidistantes de los tres puntos A, B, D, es la perpendicular l al plano p que pasa por el punto C_1 (fig. 212).

Examinemos ahora los puntos A y E. El conjunto de todos los puntos del espacio equidistantes de los puntos A y E es el plano q, que es perpendicular a la recta AE y pasa por el punto medio del segmento AE. El plano q cortará obligatoriamente la recta l, ya que el punto E no está situado en el plano p. Es evidente, que el punto C, que es la intersección del plano q con la recta l, será equidistante de todos los cuatro puntos dados A, B, D, E. De la construcción se ve que el punto C es el único punto del espacio, que satisface esta condición. ■

§ 74. Posición recíproca del plano y la esfera

Sea que están definidos el plano p y la esfera ω de radio R con centro en el punto C. Analicemos su posición recíproca en el espacio.

Tracemos a través del punto C la recta l perpendicular al plano p. Sea que C_1 es el punto de intersección de la recta l con el plano p.

Si $|CC_1| > R$, la esfera ω no tiene puntos comunes con el plano p (fig. 213), ya que el punto C_1 está situado fuera

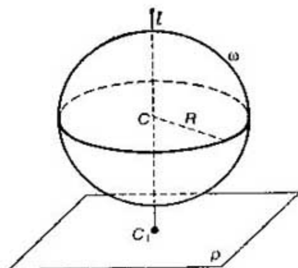


Fig. 213

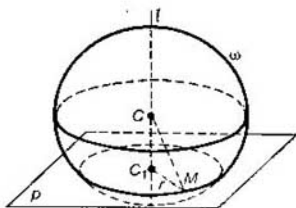


Fig. 214

de la esfera de radio R con centro en el punto C, y los demás puntos del plano p distan del punto C más que el punto C_1.

Si $|CC_1| < R$, el plano p corta la esfera ω por la circunferencia (fig. 214) con centro en el punto C_1 y radio

$$r = \sqrt{R^2 - |CC_1|^2}.$$

De hecho, si M es un punto arbitrario perteneciente a p y ω, entonces del triángulo rectangular CC_1M obtenemos

$$|C_1M| = \sqrt{|CM|^2 - |CC_1|^2} = \sqrt{R^2 - |CC_1|^2} = r.$$

Por último, si $|CC_1| = R$, el plano p con la esfera ω tiene un punto común, que es el punto C_1 (fig. 215).

El plano que tiene con la esfera solamente un punto común se denomina *plano tangente* de esta esfera, y su punto común, *punto de tangencia.*

De lo expuesto se deduce que si $|CC_1| = R$, entonces el plano p es un plano tangente a la esfera ω, además, el punto C_1 es un punto de tangencia. Por su construcción el plano p

es perpendicular al diámetro que pasa por el punto de tangencia C_1.

Teorema. *El plano es tangente a la esfera, si pasa por un punto de ésta y es perpendicular a su diámetro, que pasa por dicho punto.*

En efecto, si M es un punto arbitrario del plano p diferente del punto C_1 (véase fig. 215), entonces $|CM| > |CC_1|$, y, por lo tanto, el punto M no pertenece a la esfera ω. Por consiguiente, el punto C_1 es el único punto común del plano p y de la esfera ω, es decir, el plano p es un plano tangente a la esfera ω. ■

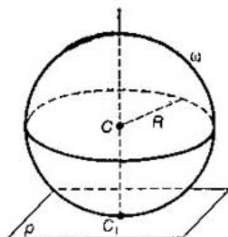


Fig. 215

Problema 1. ¿Cómo están situados los planos definidos por las ecuaciones $x = 3$, $x = 5$ y $x = 7$ respecto a la esfera

$$x^2 + y^2 + z^2 = 25?$$

△ La esfera dada es la esfera de radio $R = 5$ con centro en el origen de coordenadas O (0; 0; 0).

El primer plano dista del centro de la esfera $d = 3$. Por consiguiente, corta la esfera por la circunferencia de radio $r = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$ con centro en el punto (3; 0; 0).

El segundo plano dista del centro de la esfera $d = 5$. Por consiguiente, el plano es tangente a la esfera en el punto (5; 0; 0).

El tercer plano se encuentra del centro de la esfera a la distancia $d = 7 > R$. Por consiguiente, el plano no tiene puntos comunes con la esfera. ▲

Problema 2. El plano $y = 3$ corta la esfera

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2z = 16$$

por cierta circunferencia. Hállese su radio y centro.

△ Transformando la ecuación de la esfera a la forma

$$(x - 1)^2 + y^2 + (z + 1)^2 = 18,$$

vemos que la esfera dada es la esfera de radio $R = \sqrt{18}$ con centro en el punto (1; 0; —1).

El plano $y = 3$ dista del centro de la esfera $d = 3$. Por consiguiente, él corta la esfera por la circunferencia de radio $r = \sqrt{18 - 9} = 3$ con centro en el punto (1; 3; —1). ▲

§ 75 *. Superficies de revolución

1. Sea que en el plano p están definidas la curva L y cierta recta l. Se llama *superficie de revolución*, la superficie engendrada por una curva L que gira alrededor de la recta l.

Sea que la curva L está situada en el plano xOy (fig. 216) y tiene la ecuación

$$y = f(x), \quad x \in [a, b]. \quad (1)$$

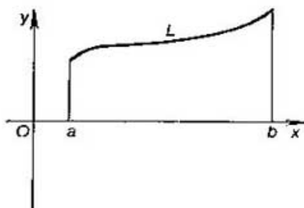


Fig. 216

Hallemos la ecuación de la superficie engendrada por la revolución de una curva alrededor del eje Ox (fig. 217). Es evidente, que el punto M con las coordenadas $(x; y; z)$, donde $x \in [a; b]$, pertenece a la superficie de revolución buscada si, y sólo si,

$$\sqrt{y^2 + z^2} = |f(x)|.$$

En efecto, los puntos $(x; y; z)$ y $(x; f(x); 0)$ están situados en una misma circunferencia con centro en el punto $(x; 0; 0)$.

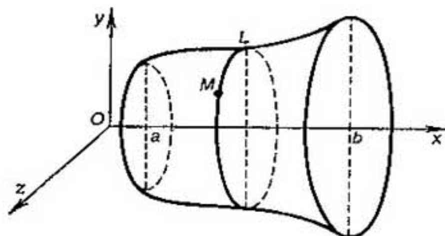


Fig. 217

Así pues, la ecuación de la superficie, engendrada por la curva (1) que gira alrededor del eje Ox, tiene la forma

$$y^2 + z^2 = (f(x))^2, \quad x \in [a; b]. \quad (2)$$

Señalemos que la ecuación (2) se obtiene de la ecuación (1) del modo siguiente: ambos miembros de la ecuación (1) se elevan al cuadrado y y^2 se sustituye por $y^2 + z^2$.

En particular, si la curva L está definida por la ecuación

$$y^2 = F(x), \tag{3}$$

entonces la ecuación de la superficie, engendrada por esta curva al girar alrededor del eje Ox, tiene la forma

$$y^2 + z^2 = F(x), \tag{4}$$

es decir, simplemente sustituimos y^2 por $y^2 + z^2$.

2. Se denomina *elipsoide de revolución*, la superficie engendrada por la revolución de una elipse alrededor de uno de sus ejes.

Sea que en el plano xOy la elipse está definida por la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{5}$$

Hagamos la ecuación de la superficie, engendrada por la revolución de la elipse alrededor del eje Ox. La ecuación de la elipse (5) se reduce a la forma (3), por consiguiente, para obtener la ecuación del elipsoide de revolución es suficiente sustituir en la ecuación (5) y^2 por $y^2 + z^2$. Luego de la sustitución obtendremos

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2 + z^2}{b^2} = 1. \tag{6}$$

Esta ecuación se escribe habitualmente así:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Si $a > b$ la ecuación (6) define un elipsoide de revolución, estirado a lo largo del eje Ox (fig. 218), si $a < b$ la ecuación (6) determina un elipsoide de revolución comprimido a lo largo del eje Ox (fig. 219) y si $a = b$, define una esfera.

Problema 1. La elipse con los semiejes $b = 6$ y $a = 4$ y el centro en el origen de coordenadas gira en torno a su eje menor, coincidente con el eje Ox. Escríbase la ecuación de la superficie descrita por una elipse en revolución.

△ Escribamos la ecuación de la elipse dada:

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{36} = 1.$$

Sustituyendo y^2 por $y^2 + z^2$ en esta ecuación, obtendremos la ecuación buscada del elipsoide de revolución:

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2+z^2}{36} = 1 \quad \text{ó} \quad \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{36} + \frac{z^2}{36} = 1. \ \blacktriangle$$

3. Se denomina ***hiperboloide de revolución***, la superficie engendrada por la revolución de una hipérbola alrededor de

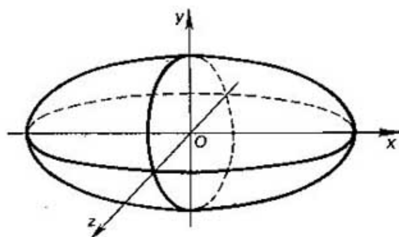


Fig. 218

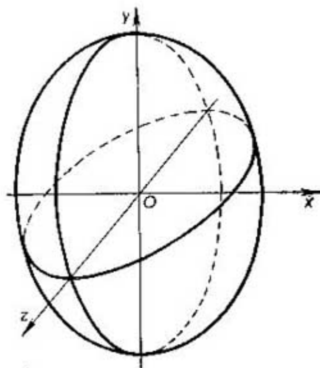


Fig. 219

uno de sus ejes. En caso de que la hipérbola gire en torno a su eje real se genera *un hiperboloide de revolución de dos hojas* (fig. 220) y en caso de que la hipérbola gire en torno a su eje imaginario se engendra *un hiperboloide de revolución de una hoja* (fig. 221).

Sea que en el plano xOy la hipérbola está definida por la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{7}$$

Escribamos la ecuación de la superficie, engendrada por la revolución de una hipérbola alrededor de su eje real Ox. La ecuación de la hipérbola (7) se reduce a la forma (3); por consiguiente, para obtener la ecuación de la superficie del hiperboloide de revolución de dos hojas es suficiente sustituir y^2 por $y^2 + z^2$ en la ecuación de la hipérbola. Luego

de la sustitución obtendremos

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2+z^2}{b^2}=1. \tag{8}$$

Cuando la hipérbola (7) gira alrededor de su eje imaginario, es necesario sustituir en la ecuación (7) x^2 por x^2+z^2; luego, obtendremos

$$\frac{x^2+z^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1. \tag{9}$$

Problema 2. La hipérbola con los semiejes $a=3$ y $b=4$ gira en torno a su eje imaginario, coincidente con el eje Oy.

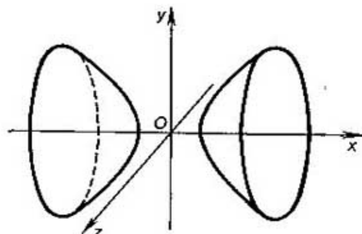


Fig. 220

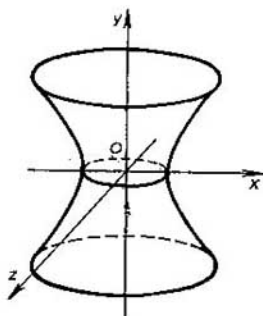


Fig. 221

El centro de la hipérbola coincide con el origen de coordenadas. Escríbase la ecuación de la superficie engendrada por la revolución de esta hipérbola.

△ Escribamos la ecuación de la hipérbola:

$$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1.$$

Para obtener la ecuación del hiperboloide de revolución, sustituyamos en la ecuación de la hipérbola x^2 por x^2+z^2. Después de la sustitución obtendremos

$$\frac{x^2+z^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1 \quad \text{ó} \quad \frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{9}=1. \ ▲$$

4. Se denomina *paraboloide de revolución* la superficie engendrada por la revolución de una parábola en torno a su eje de simetría (fig. 222).

Sea que en el plano $x\hat{O}y$ la parábola está definida por la ecuación

$$x^2 = 2py. \qquad (10)$$

Para obtener la ecuación de la superficie de revolución, es necesario sustituir en la ecuación (10) x^2 por $x^2 + z^2$; luego, obtendremos

$$x^2 + z^2 = 2py.$$

Señalemos una propiedad notable más de esta superficie. Si hacemos cristalina la superficie interior del paraboloide de revolución, y en su foco (se denomina foco del paraboloide de revolución el foco de la parábola giratoria) colocamos una fuente de luz, entonces todos los rayos de luz, al reflejarse de la superficie del paraboloide, irán paralelamente al eje del paraboloide.

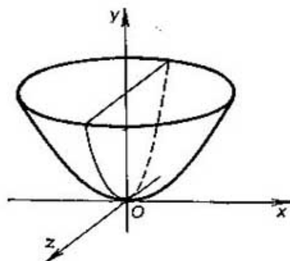


Fig. 222

Esta propiedad se utiliza ampliamente en la fabricación de reflectores de luz (proyectores, faros de automóviles, proyectores cinematográficos y otros aparatos).

Problema 3. Escríbase la ecuación de la superficie engendrada por la revolución de la parábola $y^2 = 2x$ en torno al eje Ox.

△ Para hacer la ecuación del paraboloide de revolución, engendrado por la revolución de una parábola en torno al eje Ox, es necesario en la ecuación $y^2 = 2x$ sustituir y^2 por $y^2 + z^2$; luego de la sustitución obtendremos

$$y^2 + z^2 = 2x. \blacktriangle$$

5. Si hacemos girar una recta, paralela a cualquier eje de coordenadas, alrededor de este eje, se generará *una superficie circular cilíndrica.*

Sea dada una recta que está situada en el plano yOz y que tiene la ecuación $y = a$. Es fácil ver que la superficie de revolución de esta recta en torno al eje Oz tiene la ecuación

$$x^2 + y^2 = a^2.$$

Dicha superficie cilíndrica está representada en la figura 223.

Problema 4. Escríbase la ecuación de la superficie cilíndrica, engendrada por la revolución de la recta $y = 3$, situada en el plano xOy en torno al eje Ox.

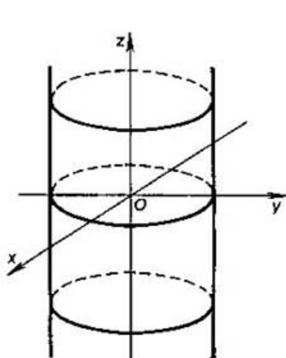


Fig. 223

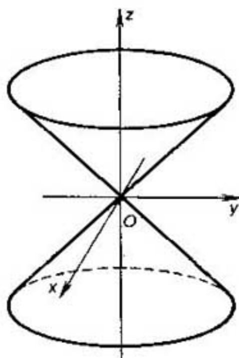


Fig. 224

△ Sustituyamos en la ecuación $y^2 = 3^2$, y^2 por $y^2 + z^2$ y obtendremos como resultado

$$y^2 + z^2 = 9. \ \blacktriangle$$

6. Sea dada una recta situada en el plano yOz y que pasa por el origen de coordenadas:

$$y = kz, \quad k \neq 0.$$

Es evidente, que la ecuación de la superficie de revolución de esta recta en torno al eje Oz tiene la forma

$$x^2 + y^2 = k^2z^2.$$

La ecuación obtenida es la ecuación de la superficie de revolución buscada, la cual se llama *superficie circular cónica* (fig. 224).

Problema 5. Hágase la ecuación de la superficie de revolución de la recta $2x = 3y$, $z = 0$ en torno al eje Ox.

△ Utilizando la fórmula (2), de la ecuación $3y = 2x$ hallamos $9(y^2 + z^2) = 4x^2$. Esta es la ecuación buscada. ▲

§ 76*. Superficies cilíndricas

Si a través de cada punto de la curva L se traza una recta paralelamente al vector dado $\boldsymbol{a}$, engendramos una superficie que se denomina *superficie cilíndrica*. Se denominan *generatrices* de una superficie cilíndrica las rectas paralelas al vector $\boldsymbol{a}$ y pertenecientes a dicha superficie, en tanto que la curva L se denomina *directriz* de la superficie cilíndrica (fig. 225).

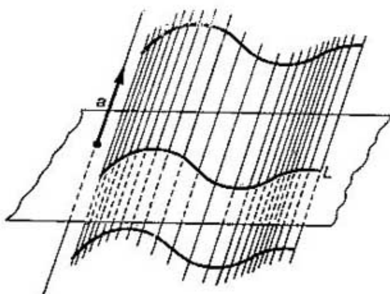


Fig. 225

Si en una sección de una superficie cilíndrica por un plano, que es perpendicular a sus generatrices (*en la sección normal*) se forma una circunferencia, la superficie cilíndrica se denomina *circular*. Si en la sección se forma una elipse, la superficie cilíndrica se denomina *elíptica*, si se forma una hipérbola se llama *hiperbólica*, si se forma una parábola, *parabólica*.

Sea que en el espacio se da un sistema rectangular de coordenadas $Oxyz$, y sea que en el plano xOy se da la curva L, cuya ecuación tiene en este plano la forma

$$F(x;\ y) = 0. \tag{1}$$

Escribamos la ecuación de la superficie cilíndrica con las generatrices paralelas al vector $\boldsymbol{a} = (\alpha;\ \beta;\ \gamma)$, $\gamma \neq 0$, si por directriz se toma la curva L (fig. 226).

Examinemos un punto arbitrario de esta superficie $M(x;\ y;\ z)$. La generatriz l, que pasa a través del punto M, cortará el plano xOy en el punto N situado en la curva L. Si designamos las coordenadas del punto N en el espacio

con $(x_1;\ y_1;\ 0)$, entonces el vector $\overrightarrow{MN}$ tiene las coordenadas $(x_1 - x;\ y_1 - y;\ 0 - z)$.

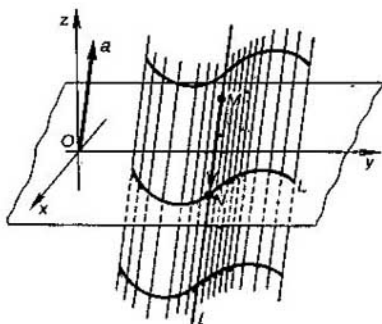


Fig. 226

De acuerdo con la definición de la superficie cilíndrica los vectores a y $\overrightarrow{MN}$ son colineales, es decir,

$$\overrightarrow{MN} = \lambda a;$$

por consiguiente, tenemos el sistema de ecuaciones

$$x_1 - x = \lambda\alpha, \quad y - y_1 = \lambda\beta, \quad 0 - z = \lambda\gamma.$$

Al resolver este sistema de ecuaciones respecto aλ, x_1 y y_1, obtendremos

$$\lambda = -\frac{z}{\gamma}, \quad x_1 = x - z\frac{\alpha}{\gamma}, \quad y_1 = y - z\frac{\beta}{\gamma}. \tag{2}$$

Puesto que el punto N está situado en la curva L, entonces $F(x_1;\ y_1) = 0$. Sustituyendo x_1 y y_1 según las fórmulas (2), obtendremos la ecuación

$$F\left(x - z\frac{\alpha}{\gamma};\quad y - z\frac{\beta}{\gamma}\right) = 0, \tag{3}$$

la cual, evidentemente, será la ecuación de la superficie cilíndrica dada.

Problema 1. Hágase la ecuación de la superficie cilíndrica, cuya directriz está situada en el **plano** xOy y tiene la

ecuación $x^2 + y^2 = 4$, y las generatrices son paralelas al vector $\boldsymbol{a} = (0;\ 1;\ 1)$.

△ Puesto que de acuerdo con la condición del problema $F(x;\ y) = x^2 + y^2 - 4$ y $\alpha = 0$, $\beta = 1$, $\gamma = 1$, en virtud

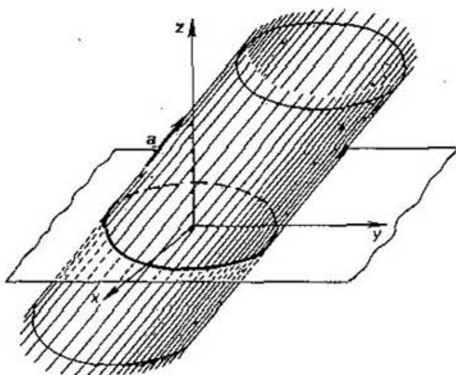


Fig. 227

de la fórmula (3) la ecuación de la superficie cilíndrica dada tiene la forma

$$\left(x - z\ \frac{0}{1}\right)^2 + \left(y - z \cdot \frac{1}{2}\right)^2 - 4 = 0$$

o, definitivamente,

$$x^2 + (y - z)^2 - 4 = 0.$$

Esta superficie está ilustrada en la figura 227. ▲

Se puede mostrar análogamente, que si la directriz de la superficie cilíndrica L está situada en el plano xOz y se define por la ecuación $F(x;\ z) = 0$, y el vector $\boldsymbol{a}$ no es paralelo a este plano, la superficie cilíndrica tiene la ecuación

$$F\left(x - y\frac{\alpha}{\beta};\quad z - y\,\frac{\gamma}{\beta}\right) = 0.$$

Por fin, si L se define por la ecuación $F(y;\ z) = 0$ y $\boldsymbol{a}$ no es paralelo al plano yOz, la ecuación de la superficie

cilíndrica tiene la forma

$$F\left(y - x\frac{\beta}{\alpha};\quad z - x\frac{\gamma}{\alpha}\right) = 0.$$

Señalemos que si la directriz de la superficie cilíndrica está situada en el plano xOy, y las generatrices son paralelas al eje Oz, la ecuación de la superficie cilíndrica en el espacio coincide con la ecuación de la directriz y tiene la forma

$$F(x; y) = 0. \tag{4}$$

La ecuación (4), como una ecuación del conjunto de los puntos del plano, define la curva L, y, al mismo tiempo, la ecuación (4), como ecuación del conjunto de los puntos del espacio, define la superficie cilíndrica.

Así pues, cada una de las ecuaciones

$$F(x;\ y) = 0,\quad F(x;\ z) = 0,\quad F(y;\ z) = 0$$

pueden ser interpretadas de dos modos: si ésta es la ecuación del conjunto de los puntos del plano, entonces es la ecuación de la línea L, situada en el plano de sus variables; pero si ésta es la ecuación del conjunto de los puntos del espacio, entonces cada una de estas ecuaciones define la superficie cilíndrica con la directriz L y las generatrices paralelas al eje de una variable ausente.

Examinemos varios ejemplos.

1. La ecuación

$$x^2 + y^2 = r^2$$

en el plano xOy define una circunferencia con el centro en el origen de coordenadas y el radio r (fig. 228, *a*). La misma ecuación define en el espacio una superficie circular cilíndrica, cuya directriz es una circunferencia situada en el plano xOy, y las generatrices son paralelas al eje Oz (fig. 228, *b*).

2. La ecuación

$$x^2 + z^2 = 4$$

en el plano xOz define una circunferencia con centro en el origen de coordenadas y radio $r = 2$ (fig. 229, *a*). La misma ecuación define en el espacio una superficie circular cilíndrica, cuya directriz es una circunferencia situada en el plano xOz, y las generatrices son paralelas al eje Oy (fig. 229, *b*).

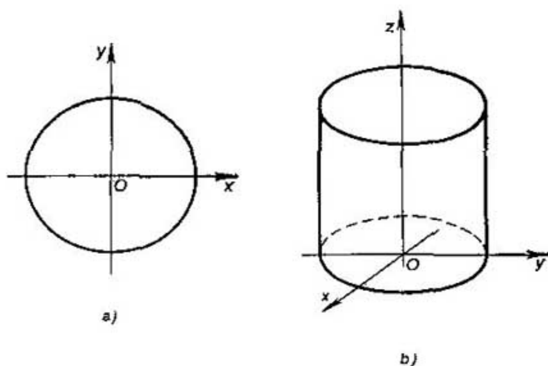


Fig. 228

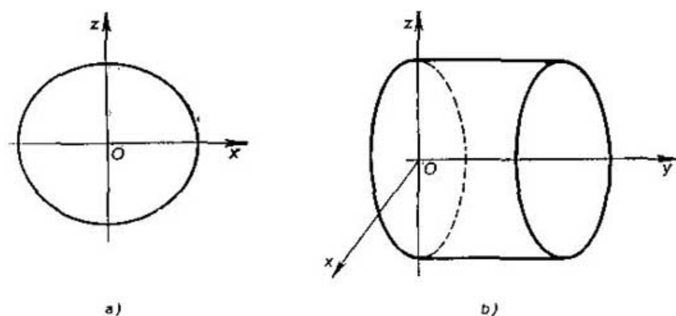


Fig. 229

3. La ecuación

$$y^2 + z^2 + 9 = 0$$

tanto en el plano como en el espacio define un conjunto vacío, ya que la suma de los números no negativos no puede ser un número negativo.

4. La ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

en el plano xOy define una elipse con centro en el origen de coordenadas y semiejes a y b (fig. 230, a). La misma ecua-

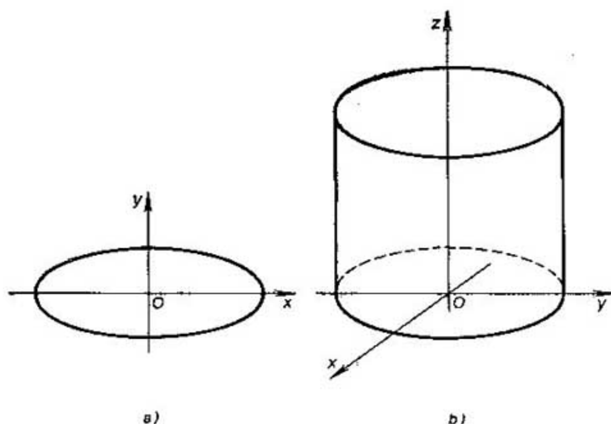


Fig. 230

ción define en el espacio una superficie elíptica cilíndrica con una directriz en el plano xOy y las generatrices paralelas al eje Oz (fig. 230, b).

5. La ecuación

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

en el plano xOy define una hipérbola con centro en el origen de coordenadas y semiejes a y b (fig. 231, a). Esta ecuación define en el espacio una superficie hiperbólica cilíndrica con las generatrices paralelas al eje Oz (fig. 231, b).

6. La ecuación

$$y^2 = 2px$$

en el plano xOy define una parábola (fig. 232, a), y en el espacio, una superficie parabólica cilíndrica con las generatrices paralelas al eje Oz (fig. 232, b).

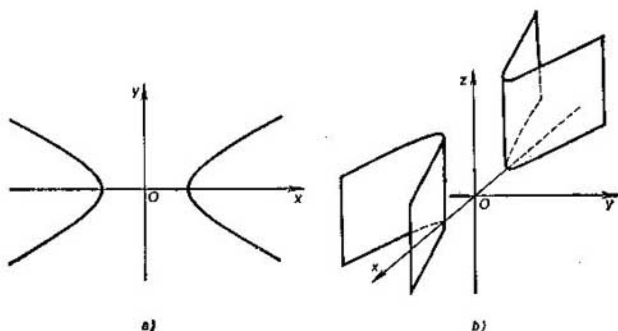


Fig. 231

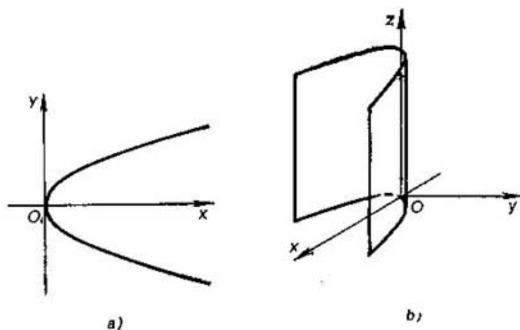


Fig. 232

Problema 2. Determínese el tipo de superficie $3x^2 + 6y^2 - 24 = 0$.

△ Reduzcamos la ecuación dada a la forma:

$$\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1.$$

Esta ecuación define en el espacio una superficie elíptica cilíndrica con directriz en el plano xOy y generatrices paralelas al eje Oz. ▲

§ 77 *. Superficies cónicas

Se denomina *superficie cónica* la unión de todas las rectas que pasan por cada punto de una curva dada y cierto punto fijo del espacio no situado en esta curva. La curva dada se denomina *directriz*, el punto dado fijo, *vértice*, y las rectas se llaman *generatrices* de la superficie cónica (fig. 233).

Fig. 233

Es fácil ver que las superficies cónicas están formadas por dos huecos con un vértice común.

Las superficies cónicas y cilíndricas tienen una propiedad notable: todas ellas se desarrollan en un plano sin pliegues ni discontinuidades y, viceversa, se pueden obtener superficies cónicas y cilíndricas encorvando material de hojas planas. Debido a esta propiedad estas superficies adquirieron amplia aplicación en la técnica.

Deduzcamos la ecuación de la superficie cónica.

Si M es un punto arbitrario de esta superficie, diferente del vértice S, y N es el punto de intersección de la generatriz SM con la directriz L, entonces los vectores $\overrightarrow{SM}$ y $\overrightarrow{SN}$ son colineales. Por lo tanto, existe tal número λ que

$$\overrightarrow{SM} = \lambda\overrightarrow{SN}. \qquad (1)$$

Sea que, para simplificar, la curva L está situada en el plano xOy y tiene la ecuación

$$F(x;\ y) = 0, \qquad (2)$$

y el vértice S que está situado en el eje Oz tiene las coordenadas $(0;\ 0;\ c)$, $c \neq 0$. Entonces

$$\overrightarrow{SM} = (x;\ y;\ z - c), \quad \overrightarrow{SN} = (\xi;\ \eta;\ -c),$$

donde $(x; y; z)$ son las coordenadas del punto M, y $(\xi; \eta)$ son las coordenadas del punto N en el plano xOy. De la igualdad vectorial (1) obtenemos las siguientes igualdades para las coordenadas:

$$x = \lambda\xi, \quad y = \lambda\eta, \quad z - c = -\lambda c.$$

De aquí hallamos

$$\xi = \frac{cx}{c-z}, \qquad \eta = \frac{cy}{c-z}.$$

Dado que las coordenadas ξ, η satisfacen la ecuación (2), las coordenadas $(x; y; z)$ satisfacen la ecuación

$$F\left(\frac{cx}{c-z}, \frac{cy}{c-z}\right) = 0. \tag{3}$$

Esta es la ecuación de la superficie cónica con vértice en el punto S $(0; 0; c)$, $c \neq 0$ y directriz $F(x; y) = 0$. Así pues, la ecuación de la superficie cónica (3) se obtiene de la ecuación de la directriz (2) al sustituir x por $\frac{cx}{c-z}$ y y por $\frac{cy}{c-z}$.

Problema. Escríbase la ecuación de la superficie cónica con vértice en el punto $(0; 0; c)$, $c > 0$ y directriz

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

△ La superficie cónica dada tiene la ecuación

$$\frac{1}{a^2}\left(\frac{cx}{c-z}\right)^2 + \frac{1}{b^2}\left(\frac{cy}{c+z}\right)^2 = 1.$$

Después de realizar las transformaciones correspondientes obtenemos la ecuación buscada:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{(z-c)^2}{c^2}. \quad ▲$$

§ 78. Cono y cono truncado

Examinemos en el plano p la figura acotada D y cierto punto S del espacio no situado en el plano p. La unión de todos los segmentos SM, donde $M \in D$, se denomina *cono con vértice en el punto S y base D* (fig. 234).

Se llama *altura del cono* el segmento de la perpendicular trazada a través del vértice del cono al plano de la base. La

longitud de dicho segmento también se llama altura del cono.

Es evidente que un cono con vértice S y base D está acotado por el plano p y la superficie cónica, cuyo vértice se encuentra en el punto S, y la directriz es la frontera de la

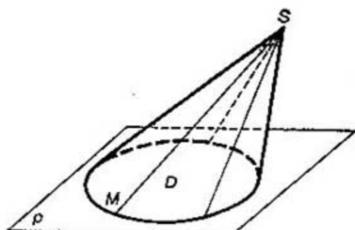


Fig. 234

figura D. Se denomina *superficie lateral del cono* aquella parte de la superficie cónica que es la frontera del cono.

Si la base del cono es un círculo y el vértice del cono se proyecta en el centro del círculo, entonces tal cono se denomina *cono circular recto*.

El cono circular recto puede ser engendrado por la revolución de un triángulo rectángulo alrededor de uno de sus

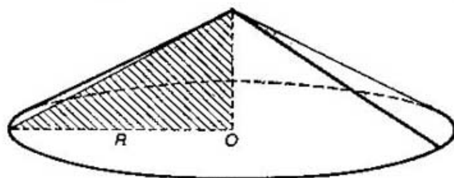


Fig. 235

catetos (fig. 235). Entonces la hipotenusa describe la superficie lateral, y el cateto, no situado en el eje de revolución, la base del cono.

Se denomina *cono truncado* (fig. 236) la parte del cono comprendida entre su base y cierto plano q, que es paralelo a la base y se interseca con el cono. Se denomina *base superior* la figura D_1 del plano q, que es parte de la frontera del cono

truncado, y la figura D del plano p se llama, en este caso, *base inferior*. Se denomina *altura del cono truncado* la distancia entre los planos de las bases.

El cono truncado, que es parte del cono circular recto, puede ser obtenido por la rotación de un trapecio rectangular alrededor de su altura OO_1 (fig. 237). El lado lateral del trapecio describe la superficie lateral del cono, la base superior del trapecio, la base superior del cono, y la base

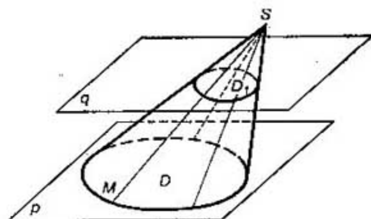


Fig. 236

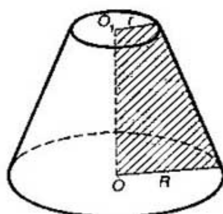


Fig. 237

inferior del trapecio, la base inferior de este cono truncado.

En caso general la base del cono puede ser cualquier figura limitada, por ejemplo, cualquier polígono. Por lo tanto, cualquier pirámide es un cono.

El cono se denomina *elíptico* si la base del cono es una figura limitada por la elipse. Es evidente, que el cono circular recto es un caso particular del cono elíptico.

§ 79. El cilindro

Examinemos en el plano p la figura limitada D y cierto vector $\boldsymbol{a}$, que no es paralelo al plano p. Entonces, la unión de todos los segmentos MN tales, que $M \in D$ y $\overrightarrow{MN} = \boldsymbol{a}$ se denomina *cilindro con base D* (fig. 238). Es evidente, que el conjunto D' de todos los puntos N, que se obtienen con el traslado paralelo de los puntos $M \in D$ (al vector $\boldsymbol{a}$) está situado en el plano q que es paralelo al plano p. Además, la figura D' es congruente a la figura D.

Las figuras D y D' se denominan *bases del cilindro*. La distancia entre los planos de las bases se denomina *altura del cilindro*.

Se denomina *superficie lateral del cilindro* la parte de la superficie cilíndrica que es la frontera del cilindro.

Si la base del cilindro es un círculo y las generatrices de la superficie cilíndrica son perpendiculares a los planos de las bases, tal cilindro se denomina *cilindro circular recto.*

El cilindro circular recto puede ser engendrado por la revolución de un rectángulo en torno a uno de sus lados (fig. 239). El lado del rectángulo paralelo al eje de revolución y no situado en él, describe la superficie lateral, y los lados perpendiculares al eje de revolución, las bases del cilindro.

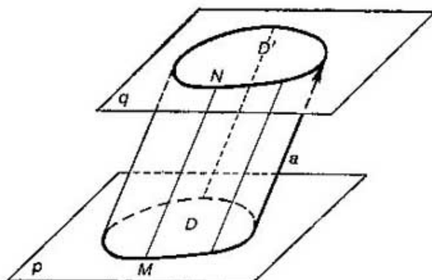
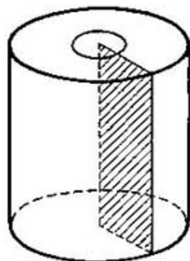


Fig. 238


Fig. 239

En caso general, la base del cilindro puede ser cualquier figura limitada, por ejemplo, cualquier polígono. Por lo tanto, cualquier prisma es un cilindro.

Si la base del cilindro es una figura, limitada por una elipse, el cilindro se denomina *elíptico.* En particular, el cilindro circular recto es un caso especial del cilindro elíptico

Problemas para el capítulo VI

6.1. Escríbase la ecuación de la esfera con centro en el origen de coordenadas y radio $R = 6$.

6.2. El punto M (—2; 2; 1) está situado en la esfera, y el centro de la esfera se encuentra en el origen de coordenadas. Escríbase la ecuación de la esfera.

6.3. Se da la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ y tres puntos: A (2; —1; 1), B (2; 2; —1), C (—1; —2; 5). Determínese, cuál de estos puntos se encuentra dentro de la esfera, en la esfera y fuera de la esfera.

6.4. Hállense el centro y el radio de las esferas:

a) $x^2 + (y - 1)^2 + (z + 3)^2 = 81$;

b) $(x - 2)^2 + (y + 4)^2 + (z - 1)^2 = 72$.

6.5. Demuéstrese que las siguientes ecuaciones son ecuaciones de esferas:

a) $x^2 + y^2 + 2y + z^2 + z - 1 = 0$.

b) $x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 4y + 2z - 43 = 0$.

6.6. ¿Qué figura es la intersección de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ y del plano:

a) $y = 1$; $b = \frac{1}{2}$; c) $y = 2$?

6.7. ¿Qué figura es la intersección de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 10$ y del plano $z = 1$?

6.8. El plano $z = -1$ corta la esfera $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 = 25$ por cierta circunferencia. Hállense su centro y el radio.

6.9. El centro de la esfera se encuentra en el plano $z = 4$, y la misma esfera es tangente al plano xOy en el punto M (2; 3; 0). Fórmese la ecuación de la esfera y determínense las coordenadas de su centro.

6.10. Los puntos A (3; -5; 6) y B (5; 7; -1) son los extremos de uno de los diámetros de la esfera. Escríbase la ecuación de esta esfera.

6.11. Se dan los puntos: A (2; -5; 8), B (8; -2; 5), C (5; -8; 2) y D (-2; -8; -5). Escríbase la ecuación de la esfera si sabemos que estos puntos están situados en su superficie.

6.12. Hállense las coordenadas del punto, que es simétrico al centro de la esfera $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 + (z - 1)^2 = 24$ respecto al plano tangente a la esfera en el punto M (-1; 0; 3).

6.13. Los puntos A (7; -2; 4) y B (9; -8; 6) están situados en la superficie de la esfera y en la recta que atraviesa su centro. Fórmese la ecuación de la esfera.

6.14. Escríbase la ecuación de la superficie de revolución de la elipse $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{14} = 1$ en torno al eje Oy.

6.15. La elipse con los semiejes $a = 6$, $b = 4$ y el centro en el origen de coordenadas gira en torno a su eje mayor, coincidente con el eje Oz. Escríbase la ecuación de la superficie de revolución. Ilústrese la superficie en la figura.

6.16. Escríbase la ecuación de la superficie descrita por una hipérbola que gira en torno a su eje real, coincidente con el eje Ox. Los semiejes de la hipérbola son $a = 8$ y $b = 6$, su centro coincide con el origen de coordenadas. Ilústrese la superficie en una figura.

6.17. Escríbase la ecuación de la superficie de revolución de la hipérbola $\frac{x^2}{9} - \frac{z^2}{4} = 1$ en torno al eje Oz. Ilústrese la superficie en una figura.

6.18. Hágase la ecuación de la superficie de revolución de la parábola $y^2 = 6z$ en torno al eje Oz. Ilústrese la superficie en una figura.

6.19. Escríbase la ecuación de la superficie de revolución de la recta $x - 3 = 0$ en torno al eje Oz. Ilústrese la superficie en una figura.

6.20. Escríbase la ecuación de la superficie de revolución de la recta $\begin{cases} 3x = 2y \\ z = 0 \end{cases}$ en torno al eje Ox.

6.21. Hágase la ecuación de la superficie cilíndrica, cuya directriz está situada en el plano xOy y tiene la ecuación $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$, y la generatriz es paralela al vector $\boldsymbol{a}$ (1; 0; 1).

6.22. ¿Qué superficies se definen por las ecuaciones:

a) $x^2+y^2=25$;

b) $x^2+y^2+z^2=25$;

c) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$;

d) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$;

e) $y^2=6x$?

6.23. Una curva está definida en el espacio por las ecuaciones paramétricas

$$\begin{cases} x=2\cos t, \\ y=3\operatorname{sen} t, \\ z=4. \end{cases}$$

Escríbase la ecuación de la superficie cónica con el vértice en el origen de coordenadas, para la cual la curva dada es la directriz.

6.24. Hágase la ecuación de la superficie cónica obtenida por el giro de dos rectas cruzadas: $\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{4}=0$, $x=0$, en torno al eje Oz.

6.25. Determínese el tipo de superficie $14x=y^2+z^2$ y constrúyase su imagen.

6.26. Determínese qué superficie está definida por la ecuación $\frac{x^2}{48}-\frac{y^2}{12}-\frac{z^2}{12}=1$, y establézcase, por qué línea se corta con el plano $z-1=0$.

6.27. Determínese, qué superficie está definida por la ecuación $\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{18}+\frac{z^2}{8}=1$ y por qué línea se interseca con el plano $z+2=0$.

6.28. Determínese, qué superficie está definida por la ecuación $x^2+y^2-4z=0$ y establézcase por qué línea se corta con el plano $x-2=0$.

Capítulo VII

VOLÚMENES DE LOS CUERPOS Y ÁREAS DE LAS SUPERFICIES

§ 80. Volumen del paralelepípedo

Por unidad de medida de los volúmenes se toma el volumen de un cubo la longitud de la arista del cual es igual a la unidad de longitud. Por ejemplo, 1 m^3 es el volumen del cubo, cuya longitud de la arista es igual a 1 m, y 1 cm^3 es el volumen del cubo cuya longitud de la arista es igual a 1 cm. Es evidente, que 1 $m^3 = 100^3$ cm^3.

Si está elegida la unidad de longitud, entonces cualquier cubo, cuya longitud de la arista es igual a la unidad se denomina *unitario*. El volumen del cubo unitario es igual a la unidad de volumen respectiva. Se denomina *volumen del cuerpo* el número de cubos unitarios y sus partes, encerrados en el cuerpo dado. Este número puede ser entero, fraccionario o, en general, un número real arbitrario no negativo.

En adelante, al demostrar las afirmaciones concernientes a los volúmenes, se supone que se cumplen las siguientes propiedades:

1) los poliedros congruentes tienen volúmenes iguales (*propiedad de invariación*);

2) el volumen de un poliedro, que es la unión de varios poliedros, dos cualesquiera de los cuales no tienen puntos interiores comunes, es igual a la suma de los volúmenes de estos poliedros (*propiedad de aditividad*).

De la propiedad (2) se deduce la *propiedad de monotonía*: el volumen de una parte del poliedro no es superior al volumen de todo el poliedro.

Los poliedros que tienen volúmenes iguales se denominan *equivalentes*.

Deduzcamos, ante todo, la fórmula para el volumen del paralelepípedo rectangular. Recordemos, que se denominan *dimensiones* del paralelepípedo rectangular, las longitudes de sus tres aristas, que convergen en un mismo vértice. Una

de ellas se puede considerar como longitud, otra, como anchura, y la tercera, como altura.

Teorema 1. *El volumen del paralelepípedo rectangular es igual al producto de sus tres dimensiones, es decir,*

$$V = abc, \tag{1}$$

donde a, b, c *son las tres dimensiones del paralelepípedo.*

□ Es evidente que si en el paralelepípedo rectangular todas las tres dimensiones son números enteros

$$a = m, \quad b = p, \quad c = q,$$

entonces él se divide por los planos, paralelos a las caras, en mpq cubos unitarios, y, por lo tanto, su volumen es igual al producto abc.

Examinemos ahora el caso, cuando todas las tres dimensiones a, b, c son números racionales (en particular, pueden ser también enteros). Reduzcamos estos números a un denominador común. Entonces

$$a = \frac{m}{n}, \quad b = \frac{p}{n}, \quad c = \frac{q}{n},$$

donde n, m, p, q son números naturales.

Dividamos un cubo unitario en n^3 cubos de volúmenes iguales por los planos paralelos a las caras. El volumen de cada cubo es igual a $\frac{1}{n^3}$.

El paralelepípedo rectangular examinado contiene mpq cubos pequeños, y, por lo tanto, su volumen V es igual a la suma de los volúmenes de todos estos cubos:

$$V = mpq \cdot \frac{1}{n^3} = \frac{m}{n} \cdot \frac{p}{n} \cdot \frac{q}{n} = abc.$$

Examinemos, por último, el caso general cuando las dimensiones a, b, c son números reales (en particular, pueden ser también racionales). Designemos sus n-ésimas aproximaciones decimales con insuficiencia y exceso por a_n, b_n, c_n y a'_n, b'_n, c'_n respectivamente. Designemos por V_n y V'_n los volúmenes de los paralelepípedos, cuyas dimensiones son a_n, b_n, c_n y a'_n, b'_n, c'_n respectivamente. Entonces

$$V_n = a_n b_n c_n, \quad V'_n = a'_n b'_n c'_n,$$

ya que en el caso, cuando todas las tres dimensiones del paralelepípedo son números racionales, esta fórmula queda demostrada.

De acuerdo con la propiedad de monotonía de los volúmenes $V_n \leqslant V \leqslant V'_n$, es decir,

$$a_n b_n c_n \leqslant V \leqslant a'_n b'_n c'_n.$$

Pasando al límite con $n \to \infty$ en esta desigualdad, obtenemos la fórmula (1). ■

Corolario. *El volumen de un paralelepípedo rectangular es igual al producto del área de su base por la altura, es decir,*

$$V = QH, \tag{2}$$

donde Q es el área de la base del paralelepípedo y H es su altura.

□ Tomemos por base del paralelepípedo rectangular el rectángulo, cuyas longitudes de los lados son iguales a a y b

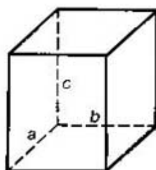


Fig. 240

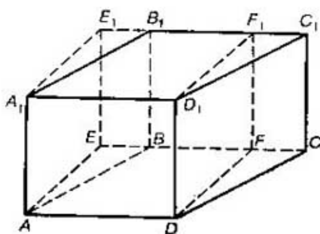


Fig. 241

(fig. 240). Entonces $ab = Q$ es el área de la base del paralelepípedo, $c = H$ es su altura, y, por lo tanto, la fórmula (2) se deduce de la fórmula (1). ■

Teorema 2. *El volumen del paralelepípedo recto es igual al producto del área de su base por la altura, es decir,*

$$V = QH, \tag{3}$$

donde Q es el área de la base del paralelepípedo, y H es su altura.

□ Examinemos el paralelepípedo recto, cuya base es el paralelogramo $ABCD$ (fig. 241). Trazando a través de las aristas AA_1 y DD_1 los planos AA_1E_1E y DD_1F_1F perpendicularmente a la recta BC, construyamos el paralelepípedo $AEFDA_1E_1F_1D_1$. Este paralelepípedo es equivalente al dado, ya que el prisma triangular $AEBA_1E_1B_1$ es congruente al

prisma triangular $DFCD_1F_1C_1$. De acuerdo con la fórmula (2)

$$V = S_{AEFD}H,$$

donde S_{AEFD} es el área del rectángulo $AEFD$. Entonces, puesto que este rectángulo es equivalente al paralelogramo $ABCD$, es decir, $F_{AEFD} = Q$, la fórmula (3) queda demostrada. ■

Problema. La base de un paralelepípedo recto es un rombo, cuya área es igual a S. Las áreas de las secciones diagonales son iguales a S_1 y S_2. Hállese el volumen del paralelepípedo.

△ Para determinar el volumen del paralelepípedo es necesario hallar su altura H (fig. 242). Designemos con d_1 y d_2 las longitudes de las diagonales de la base. Entonces

$$d_1 \cdot H = S_1, \quad d_2 \cdot H = S_2, \quad d_1 \cdot d_2 = 2S.$$

De estas ecuaciones hallamos

$$\frac{S_1}{H} \cdot \frac{S_2}{H} = 2S, \quad H = \sqrt{\frac{S_1 \cdot S_2}{2S}}.$$

Por consiguiente,

$$V = S \cdot H = S\sqrt{\frac{S_1 \cdot S_2}{2S}} = \sqrt{\frac{S \cdot S_1 \cdot S_2}{2}}. \ \blacktriangle$$

§ 81. Volumen del prisma recto

Teorema. *El volumen de un prisma recto es igual al producto del área de su base por la altura, es decir,*

$$V = QH,$$

donde Q es el área de la base del prisma y H es su altura.

□ Examinemos primeramente el prisma triangular $ABCA_1B_1C_1$ (fig. 243). Reconstruyámoslo convirtiéndolo en el paralelepípedo recto $ACBDA_1C_1B_1D_1$. Es evidente, que el área de la base $ACBD$ de este paralelepípedo es igual a $2Q$, y la altura es igual a H, por lo tanto, su volumen es igual a $2QH$.

Dado que los prismas $ABCA_1B_1C_1$ y $ABDA_1B_1D_1$ son congruentes, sus volúmenes son iguales. Por consiguiente, si V es el volumen del prisma dado, entonces $2V = 2QH$, es decir, $V = QH$. Para el prisma triangular el teorema queda demostrado.

Consideremos ahora, un **prisma** n-angular **recto arbitrario** ($n > 3$). Tracemos **por una** de las aristas **laterales del**

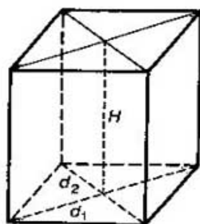


Fig. 242

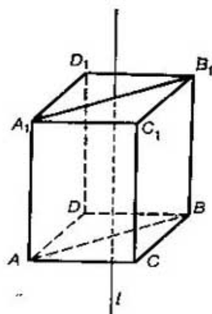


Fig. 243

prisma secciones diagonales (fig. 244). Entonces el prisma dado se descompondrá en $n-2$ prismas triangulares con

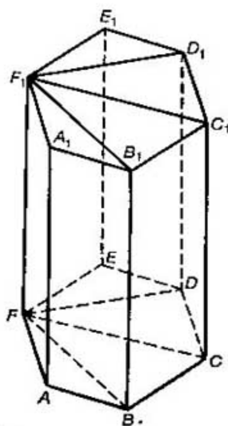


Fig. 244

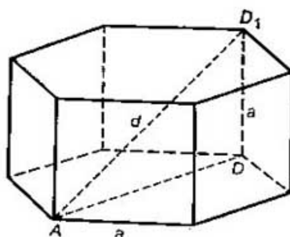


Fig. 245

una **altura** H. La suma de **sus** volúmenes es igual al volumen del prisma dado. Por lo **tanto**, si $Q_1, Q_2, \ldots, Q_{n-2}$ son

las áreas de las bases de los prismas triangulares obtenidos, entonces $Q_1 + Q_2 + \ldots + Q_{n-2} = Q$ y

$$V = Q_1H + Q_2H + \ldots + Q_{n-2}H =$$
$$= (Q_1 + Q_2 + \ldots + Q_{n-2})\,H = QH. \blacksquare$$

Problema. Hállese el volumen de un prisma hexagonal recto cuya diagonal mayor es igual a d, y las caras laterales son cuadrados.

△ Designemos con a (fig. 245) la longitud de un lado de la base del prisma y hallemos el área de la base:

$$Q = 6 \cdot \frac{1}{2} a^2 \operatorname{sen} 60^\circ = 3 \cdot a^2 \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2} a^2.$$

Del triángulo ADD_1, según el teorema de Pitágoras, obtenemos

$$|AD_1|^2 = |AD|^2 + |DD_1|^2,$$

es decir, $d^2 = (2a)^2 + a^2 = 5a^2$, $a = \dfrac{d}{\sqrt{5}}$.

Por consiguiente,

$$V = QH = \frac{3\sqrt{3}}{2} a^2 \cdot a = \frac{3\sqrt{3}}{10\sqrt{5}} \cdot d^3. \blacktriangle$$

§ 82. Volumen del cilindro recto

Sea que en el espacio está dado un cuerpo acotado D. Denominemos *circunscrito* alrededor del cuerpo D, todo poliedro K que contiene el cuerpo D, e *inscrito* en el cuerpo D todo poliedro K' comprendido en D.

Si para el cuerpo D existen sucesiones de los poliedros inscritos y circunscritos

$$K'_n \subset D \subset K_n, \quad n \in N,$$

cuyos volúmenes V'_n y V_n tienen un límite común

$$\lim_{n\to\infty} V'_n = \lim_{n\to\infty} V_n = V,$$

el número V se denomina *volumen del cuerpo* D.

Señalemos, que el volumen del cuerpo, definido de tal modo, posee las propiedades de invariación y aditividad.

Observación. Se puede demostrar, que si para el cuerpo D existen dos sucesiones de los cuerpos inscritos y circunscri-

tos (no obligatoriamente poliedros) cuyos volúmenes tienen un límite común V, entonces el volumen del cuerpo D es igual al número V.

Teorema. *El volumen de un cilindro recto es igual al producto del área de su base por la altura, es decir,*

$$V = QH,$$

donde Q es el área de la base y H es la altura del cilindro.

□ Puesto que el área de la base del cilindro es igual a Q, existen sucesiones de los poliedros circunscritos e inscritos con las áreas Q_n y Q'_n tales que

$$\lim_{n\to\infty} Q_n = \lim_{n\to\infty} Q'_n = Q.$$

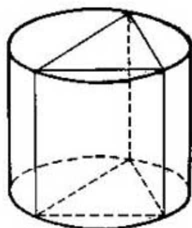


Fig. 246

Construyamos las sucesiones de los prismas, cuyas bases son los poliedros circunscritos e inscritos examinados anteriormente, y las aristas laterales son paralelas a la generatriz del cilindro dado y tienen la longitud H. Estos prismas son, para el cilindro dado, circunscritos e inscritos. Sus volúmenes se hallan por las fórmulas

$$V_n = Q_nH \text{ y } V'_n = Q'_nH.$$

Por consiguiente,

$$V = \lim_{n\to\infty} Q_nH = \lim_{n\to\infty} Q'_nH = QH. \blacksquare$$

Corolario. *El volumen de un cilindro circular recto se calcula por la fórmula*

$$V = \pi R^2 H,$$

donde R es el radio de la base y H, la altura del cilindro.

□ Puesto que la base del cilindro circular es el círculo del radio R, entonces $Q = \pi R^2$, y, por lo tanto, $V = QH = \pi R^2 H$. ■

Problema. En un cilindro circular recto está inscrito un prisma triangular regular (fig. 246). Hállese la razón entre el volumen del cilindro y el volumen del prisma.

■ Dado que el cilindro y el prisma tienen una misma altura, la razón de sus volúmenes es igual a la razón de las

áreas de las bases:

$$\frac{V_c}{V_p} = \frac{Q_c}{Q_p}.$$

Es evidente que $Q_c = \pi R^2$, donde R es el radio de la base del cilindro. La base del prisma es un triángulo regular inscrito en la circunferencia del radio R. La longitud de su lado es igual a $\sqrt{3}R$ y por lo tanto $Q_p = \frac{3\sqrt{3}}{4} R^2$.

Por consiguiente,

$$\frac{V_c}{V_p} = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}} \approx 2,4. \ \blacktriangle$$

§ 83. Cálculo del volumen de un cuerpo según las áreas de sus secciones paralelas

Examinemos el cuerpo D limitado por los planos $x = a$ y $x = b$ (fig. 247). Designemos con $S(x)$ el área de la sección del cuerpo D por un plano que pasa por el punto con la

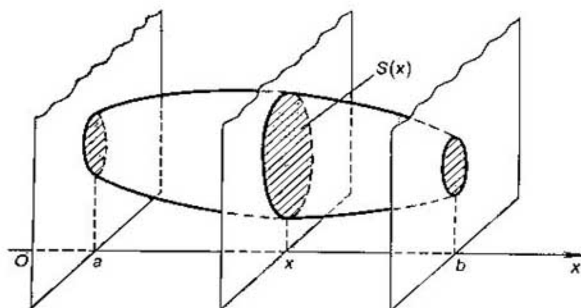


Fig. 247

abscisa $x \in [a; b]$ y es perpendicular al eje Ox. Supongamos que

1) la función $S(x)$ es continua en $[a; b]$;

2) para x_1 y x_2 cualesquiera de $[a; b]$ las secciones del cuerpo D por los planos $x = x_1$ y $x = x_2$ son tales que una de ellas se proyecta en la otra.

Se denomina *cuerpo con secciones paralelas admisibles* el cuerpo D, que posee estas propiedades.

Teorema. *El volumen de un cuerpo con secciones paralelas admisibles se calcula por la fórmula*

$$V = \int_a^b S(x)\,dx. \qquad (1)$$

□ Descompongamos el segmento $[a; b]$ con los puntos

$$x_i = a + \frac{b-a}{n}\,i, \quad i = 0, 1, \ldots, n,$$

en n segmentos $[x_{i-1}; x_i]$ de longitud

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n}.$$

Sea que m_i y M_i son los valores máximo y mínimo de la función $S(x)$ en el segmento $[x_{i-1}; x_i]$.

Descompongamos el cuerpo D en n capas por medio de los planos $x = x_i$, donde $i = 1, 2, \ldots, n-1$. Destaquemos la i-ésima capa correspondiente al segmento $[x_{i-1}; x_i]$,

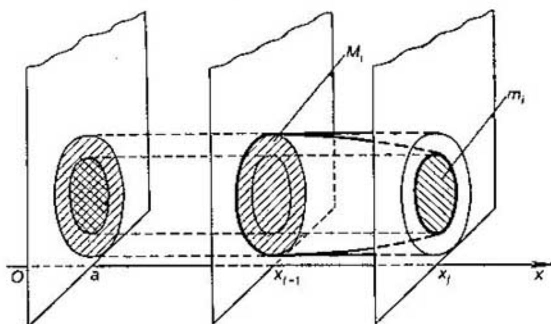


Fig. 248

y construyamos dos cilindros de Δx_i de altura; uno con la base del área M_i, que comprende la i-ésima capa, y el otro con la base del área m_i, comprendida en la i-ésima capa (fig. 248). Los volúmenes de estos cilindros son iguales a $M_i \Delta x_i$ y $m_i \Delta x_i$.

Al efectuar las construcciones indicadas para cada capa, obtendremos dos cuerpos escalonados D'_n y D''_n tales, que $D'_n < D < D''_n$. Sus volúmenes son iguales a

$$V'_n = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i, \quad V''_n = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i.$$

Como la función $S(x)$ es continua, entonces V'_n y V''_n cuando $n \to \infty$ tienen el mismo límite, igual a $\int_a^b S(x)\,dx$. Por consiguiente, el volumen del cuerpo D se calcula por la fórmula (1). ■

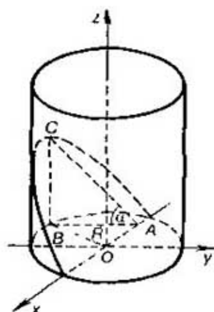


Fig. 249

Nota. Se puede demostrar que la fórmula (1) es válida también en el caso cuando la condición 2) no se cumple para el cuerpo D.

Problema. Determínese el volumen de un cuerpo, cortado de un cilindro circular recto, por el plano que pasa por el diámetro de la base y forma con el plano de ésta el ángulo α ($\alpha < 90°$). El radio de la base del cilindro es igual a R.

∠ Introduzcamos el sistema de coordenadas así como está señalado en la figura 249 y examinemos las secciones del cuerpo dado por los planos perpendiculares al eje Ox.

Calculemos el área de la sección por el plano, que pasa por el punto A con la abscisa x, $|x| < R$. Esta sección representa un triángulo rectangular ABC, y por lo tanto

$$S(x) = \frac{1}{2}|AB| \cdot |BC| = \frac{1}{2}|AB|^2 \operatorname{tg}\alpha =$$

$$= \frac{1}{2}(R^2 - |OA|^2) \operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}(R^2 - x^2) \operatorname{tg}\alpha.$$

Aplicando la fórmula (1), obtenemos

$$V = \int_{-R}^{R} \frac{1}{2}(R^2 - x^2) \operatorname{tg}\alpha\, dx = \frac{1}{2} \operatorname{tg}\alpha \int_{-R}^{R} (R^2 - x^2)\, dx =$$

$$= \frac{1}{2} \operatorname{tg} \alpha \left(R^2 x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-R}^{R} =$$

$$= \frac{1}{2} \operatorname{tg} \alpha \left(2R^3 - \frac{2}{3} R^3 \right) = \frac{2}{3} R^3 \operatorname{tg} \alpha.$$

Respuesta. $V = \frac{2}{3} R^3 \operatorname{tg} \alpha$. ▲

§ 84. Volumen de un cuerpo de revolución

Examinemos un cuerpo de revolución, obtenido por el giro en torno al eje de las abscisas, de un trapecio curvilíneo, que corresponde a una función continua no negativa $y = f(x)$,

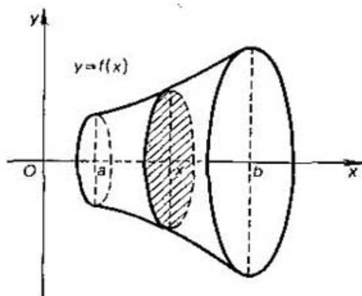


Fig. 250

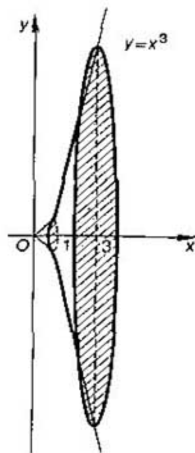


Fig. 251

$x \in [a; b]$ (fig. 250). Es evidente, que la sección de este cuerpo por el plano que pasa a través del punto con la abscisa $x \in [a; b]$ y es perpendicular al eje Ox, es el círculo del radio $f(x)$. Por consiguiente,

$$S(x) = \pi f^2(x),$$

y el volumen del cuerpo de revolución que se examina se calcula por la fórmula

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\, dx. \quad (1)$$

Problema 1. Hállese el volumen de un cuerpo, que se obtiene girando en torno al eje Ox un trapecio curvilíneo, que corresponde a la función $y = x^3$, $x \in [1; 3]$ (fig. 251).

△ Según la fórmula (1) obtenemos

$$V = \pi \int_1^3 x^6\, dx = \frac{\pi}{7} x^7 \Big|_1^3 = \frac{\pi}{7}(3^7 - 1).$$

Respuesta. $V = \frac{2186}{7}\pi$. ▲

Problema 2. Hállese el volumen de un cuerpo, que se obtiene girando en torno al eje de las abscisas un trapecio

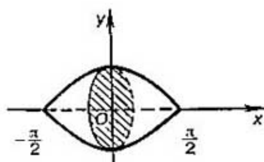


Fig. 252

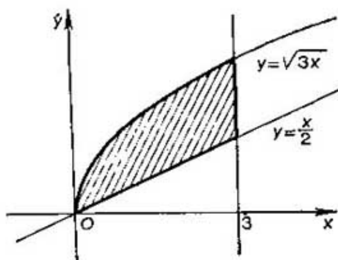


Fig. 253

curvilíneo, que corresponde a la función $y = \cos x$, $x \in \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ (fig. 252).

△ Según la fórmula (1) obtenemos

$$V = \pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 x\, dx = \frac{\pi}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 + \cos 2x)\, dx = \frac{\pi^2}{2}.$$

Respuesta. $V = \frac{\pi^2}{2}$. ▲

Problema 3. Hállese el volumen de un cuerpo, formado por el giro en torno al eje de las abscisas, de la figura, limitada por las líneas $y = \sqrt{3x}$, $y = \frac{x}{2}$ y $x = 3$ (fig. 253).

△ Es evidente, que el volumen del cuerpo de revolución dado es igual a la diferencia de los volúmenes de los cuerpos, obtenidos por el giro de los trapecios curvilíneos, corres-

pondientes a las funciones $y = \sqrt{3x}$ e $y = \frac{x}{2}$, $x \in [0; 3]$. Por consiguiente,

$$V = \pi \int_0^3 3x\,dx - \pi \int_0^3 \frac{x^2}{4}\,dx = \frac{3\pi}{2}\,x^2\Big|_0^3 - \frac{\pi}{12}\,x^3\Big|_0^3 =$$

$$= \frac{27}{2}\,\pi - \frac{27}{12}\,\pi = \frac{45}{4}\,\pi.$$

Respuesta. $V = \frac{45}{4}\pi$. ▲

§ 85. Volumen del cono circular recto

Teorema 1. *El volumen del cono circular recto con una altura H y un radio de base R se calcula por la fórmula*

$$V = \frac{1}{3}\,\pi R^2 H.$$

□ El cono dado se puede considerar como un cuerpo obtenido por el giro de un triángulo con los vértices en los puntos $O\,(0;\,0)$, $B\,(H;\,0)$, $A\,(H;\,R)$ en torno al eje Ox (fig. 254). El triángulo OAB es un trapecio curvilíneo correspondiente a la función $y = \frac{R}{H}\,x$, $x \in [0;\,H]$. Por lo tanto, utilizando la fórmula (1) del § 84, obtenemos

$$V = \pi \int_0^H \left(\frac{R}{H}\,x\right)^2 dx = \frac{\pi R^2}{H^2} \cdot \frac{x^3}{3}\Big|_0^H = \frac{1}{3}\,\pi R^2 H. \quad ■$$

Corolario. *El volumen del cono circular recto es igual a un tercio del producto del área de la base por la altura, es decir,*

$$V = \frac{1}{2}\,QH,$$

donde Q es el área de la base, y H, la altura del cono.

Teorema 2. *El volumen del cono truncado con los radios de las bases r y R y la altura H se calcula según la fórmula*

$$V = \frac{1}{3}\,\pi H\,(r^2 + R^2 + rR).$$

□ El cono truncado puede obtenerse girando el trapecio $OABC$ (fig. 255) en torno al eje Ox. La recta AB pasa por

los puntos $(0;\ r)$ y $(H;\ R)$ y tiene, por lo tanto, la ecuación

$$y = \frac{R-r}{H}x + r.$$

Utilizando la fórmula (1) del § 84, obtenemos

$$V = \pi\int_0^H\left(\frac{R-r}{H}x + r\right)^2 dx.$$

Para calcular la integral hagamos la sustitución

$$u = \frac{R-r}{H}x + r, \quad du = \frac{R-r}{H}dx.$$

Es evidente, que cuando x varía en los límites de 0 a H, la variable u varía de r a R, y, por lo tanto

$$V = \pi\int_r^R u^2\frac{H}{R-r}du = \frac{\pi H}{R-r}\cdot\frac{u^3}{3}\Big|_r^R =$$

$$= \frac{\pi H}{3(R-r)}(R^3 - r^3) = \frac{1}{3}\pi H(R^2 + r^2 + Rr). \ ■$$

Problema. Hállese el volumen de un cuerpo obtenido por el giro de un triángulo isósceles en torno al eje l que

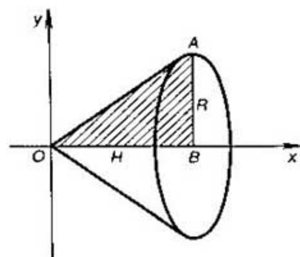


Fig. 254

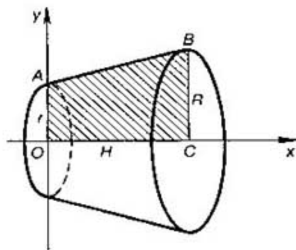


Fig. 255

pasa por el vértice de la base paralelamente al lado lateral. La longitud del lado lateral es igual a a, el ángulo del vértice es igual a α $\left(\alpha < \frac{\pi}{2}\right)$.

△ Sea que ABC es un triángulo dado (fig. 256). Tracemos los segmentos CL y BK perpendiculares al eje l. Entonces el

volumen V del cuerpo obtenido por el giro del $\triangle ABC$, se calcula según la fórmula

$$V = V_c - V'_k - V''_k,$$

donde V_c es el volumen del cilindro obtenido por el giro del rectángulo $KBCL$, y V'_k y V''_k son los volúmenes de los conos formados al girar los $\triangle AKB$ y $\triangle ALC$.

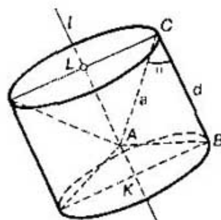


Fig. 256

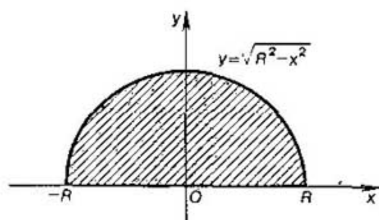


Fig. 257

Por consiguiente,

$$V = \pi |LC|^2 |BC| - \frac{\pi}{3} |KB|^2 |AK| - \frac{\pi}{3} |LC|^2 |AL|,$$

puesto que $|LC| = |KB|$ y $|AK| + |AL| = |BC|$,

$$V = \pi |LC|^2 \left(|BC| - \frac{1}{3} |BC| \right) = \frac{2}{3} \pi |LC|^2 |BC|.$$

Según la condición $|BC| = a$, y del $\triangle ALC$: $|LC| = a \operatorname{sen} \alpha$.

Por consiguiente,

$$V = \frac{2}{3} \pi a^3 \operatorname{sen}^2 \alpha. \ \blacktriangle$$

§ 86. Volumen de la esfera y de sus partes

Teorema 1. *El volumen de la esfera de radio R se calcula por la fórmula*

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3. \tag{1}$$

□ La esfera es un cuerpo de revolución. Se obtiene girando en torno al eje Ox un trapecio curvilíneo, que corresponde a la función $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, $x \in [-R; R]$ (fig. 257).

Por consiguiente, según la fórmula para el volumen de un cuerpo de revolución obtenemos

$$V = \pi \int_{-R}^{R} (R^2 - x^2)\,dx = \pi \left(R^2 x - \frac{x^3}{3} \right)\Big|_{-R}^{R} =$$
$$= 2\pi \left(R^3 - \frac{R^3}{3} \right) = \frac{4}{3}\pi R^3. \blacksquare$$

Análogamente se obtiene la fórmula para el volumen de una capa esférica, que se obtiene girando en torno al eje Ox,

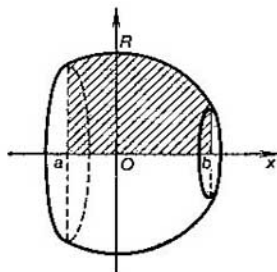


Fig. 258

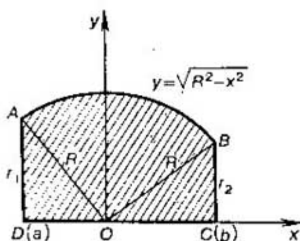


Fig. 259

un trapecio curvilíneo, que corresponde a la función $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, $x \in [a; b]$ (fig. 258).

En efecto,

$$V = \pi \int_a^b (R^2 - x^2)\,dx = \pi \left(R^2 (b - a) - \frac{b^3 - a^3}{3} \right). \qquad (2)$$

Teorema 2. *El volumen de una capa esférica cuyos radios de la base son iguales a* r_1 *y* r_2, *y la altura es igual a* H, *se calcula por la fórmula*

$$V = \frac{1}{6}\pi H (3r_1^2 + 3r_2^2 + H^2). \qquad (3)$$

□ En la figura 259 se ve que $H = b - a$, por lo tanto, la fórmula (2) se transforma del modo siguiente:

$$V = \pi H \left(R^2 - \frac{b^2 + ab + a^2}{3} \right) = \pi H \left(R^2 - \frac{(b-a)^2 + 3ab}{3} \right) =$$
$$= \pi H \left(R^2 - ab - \frac{H^2}{3} \right).$$

De los triángulos rectangulares AOD y BOC hallamos

$$r_1^2 = R^2 - a^2, \quad r_2^2 = R^2 - b^2.$$

Por consiguiente,

$$r_1^2 + r_2^2 = 2R^2 - a^2 - b^2 = 2R^2 - (b-a)^2 - 2ab = \\ = 2R^2 - H^2 - 2ab,$$

y, por lo tanto,

$$R^2 - ab = \frac{r_1^2 + r_2^2 + H^2}{2}.$$

Así pues,

$$V = \pi H \left(\frac{r_1^2 + r_2^2 + H^2}{2} - \frac{H^2}{3} \right) = \pi H \left(\frac{r_1^2 + r_2^2}{2} + \frac{H^2}{6} \right). \quad ■$$

Señalemos que si $r_1 = r_2 = 0$ y $H = 2R$, la fórmula (3) se transforma en la fórmula (1) para el volumen de la esfera

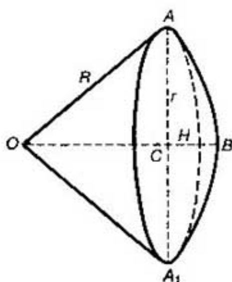


Fig. 260

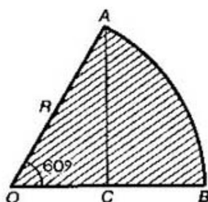


Fig. 261

de radio R. Si consideramos en la fórmula (3) $r_1 = r$ y $r_2 = 0$, obtendremos la fórmula para el volumen de *un segmento esférico*.

Corolario. *El volumen de un segmento esférico con un radio de base igual a r y la altura H se calcula según la fórmula*

$$V = \frac{1}{6} \pi H (3r^2 + H^2). \tag{4}$$

Se denomina *sector esférico* el cuerpo, que es obtenido girando un sector circular en torno a su lado.

El sector esférico obtenido por el giro del sector circular AOB (fig. 260) cuyo ángulo $\widehat{AOB} < 90°$ consta del cono OAA_1 y del segmento esférico ABA_1. Por lo tanto, el volumen del sector esférico es igual a la suma de los volúmenes del cono y del segmento esférico.

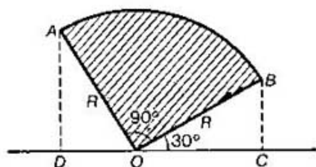


Fig. 262

Problema 1. Hállese el volumen del sector esférico de radio R, si el ángulo en su sección axial es igual a 120°.

△ El sector esférico dado se obtiene girando el sector circular OAB en torno al lado OB (fig. 261). Su volumen V es igual a la suma del volumen V_k del cono circular recto con el radio de base $|AC|$ y la altura $|OC|$ y del volumen V_{seg} del segmento esférico con el mismo radio de base $|AC|$ y la altura $|BC|$.

Es evidente que

$$|OC| = \frac{1}{2} R, \quad |AC| = \frac{\sqrt{3}}{2} R, \quad |BC| = \frac{1}{2} R.$$

Según las fórmulas respectivas obtenemos

$$V_k = \frac{1}{3} \pi |AC|^2 |OC| = \frac{1}{3} \pi \cdot \frac{3}{4} R^2 \cdot \frac{1}{2} R = \frac{\pi}{8} R^3,$$

$$V_{seg} = \frac{1}{6} \pi \cdot \frac{1}{2} R \left(3 \cdot \frac{3}{4} R^2 + \frac{R^2}{4}\right) = \frac{5\pi}{24} R^3.$$

Por consiguiente,

$$V = V_k + V_{seg} = \frac{\pi}{3} R^3. \ ▲$$

Problema 2. Hállese el volumen del cuerpo obtenido por el giro del sector circular AOB, ilustrado en la figura 262 en torno a la recta DC.

△ El volumen V del cuerpo dado lo hallamos por la fórmula

$$V = V_{ce} - V'_k - V''_k,$$

donde V_{ce} es el volumen de la capa esférica con los radios de las bases $|AD|$ y $|BC|$ y la altura $|DC|$, V'_k es el volumen del cono con el radio de la base $|AD|$ y la altura

$|DO|$, V''_k es el volumen del cono con radio de la base $|BC|$ y altura $|OC|$.

Dado que

$$|DO| = |BC| = \frac{1}{2} R, \quad |AD| = |OC| = \frac{\sqrt{3}}{2} R,$$

entonces

$$V'_k = \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{3}{4} R^2 \cdot \frac{1}{2} R = \frac{\pi}{8} R^3,$$

$$V''_k = \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{1}{4} R^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} R = \frac{\pi\sqrt{3}}{24} R^3.$$

Para calcular el volumen de la capa esférica recurramos a la fórmula (3):

$$V_{ce} = \frac{1}{6}\pi\left(\frac{1}{2}R + \frac{\sqrt{3}}{2}R\right)\left(3\cdot\frac{R^2}{4} + 3\cdot\frac{3R^2}{4} + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{1}{2}R + \frac{\sqrt{3}}{2}R\right)^2\right) = \frac{\pi}{12}(1+\sqrt{3})\left(\frac{3}{4} + \frac{9}{4} + \frac{(1+\sqrt{3})^2}{4}\right) R^3 =$$

$$= \frac{\pi}{24}(1+\sqrt{3})(8+\sqrt{3}) R^3 = \frac{\pi}{24}(11+9\sqrt{3}) R^3.$$

Por consiguiente,

$$V = \frac{\pi}{24}(11+9\sqrt{3}) R^3 - \frac{\pi}{8} R^3 - \frac{\pi\sqrt{3}}{24} R^3 =$$

$$= \frac{8\pi}{24} R^3 + \frac{8\sqrt{3}\pi}{24} R^3 = \frac{\pi}{3}(1+\sqrt{3}) R^3.$$

Respuesta. $V = \frac{\pi}{3}(1 + \sqrt{3}) R^3$. ▲

En conclusión obtendremos dos fórmulas útiles, para los volúmenes del segmento y del sector esféricos.

El volumen del segmento esférico de radio R y altura H se calcula según la fórmula

$$V = \frac{1}{3}\pi H^2 (3R - H). \qquad (5)$$

□ Del triángulo rectangular OCA se deduce (véase fig. 259) que

$$|AC|^2 = |OA|^2 - |OC|^2,$$

es decir, $r^2 = R^2 - (R - H)^2 = 2RH - H^2$.

Sustituyendo esta expresión para r^2 en la fórmula (4), obtendremos la fórmula (5). ■

El volumen del sector esférico de radio R se calcula por la fórmula

$$V = \frac{2}{3}\pi R^2 H,$$

donde R es el radio de la esfera, y H es la altura del segmento esférico respectivo.

□ Realmente, si $H < R$, entonces

$$V = \frac{1}{3}\pi H^2 (3R - H) + \frac{1}{3}\pi r^2 (R - H),$$

donde el primer sumando es el volumen del segmento esférico, y el segundo sumando es el volumen del cono. Dado que $r^2 = 2RH - H^2$, entonces $V = \frac{1}{3}\pi H^2 (3R - H) + \frac{1}{3}\pi (2RH - H^2)(R - H) = \frac{2}{3}\pi R^2 H$. Análogamente se analiza el caso de $R > H$.

§ 87 *. Volumen de un cilindro arbitrario

Teorema 1. *El volumen de un cilindro arbitrario es igual al producto del área de su base por la altura, es decir,*

$$V = QH, \tag{1}$$

donde Q es el área de la base, y H es la altura del cilindro.

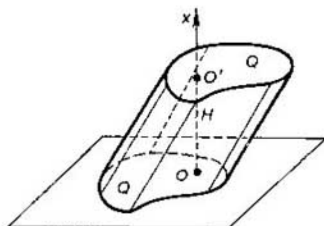


Fig. 263

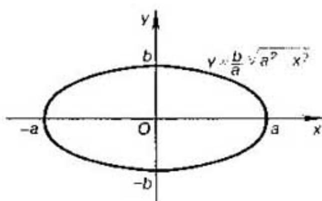


Fig. 264

□ Tomemos por dirección del eje Ox la dirección perpendicular al plano de la base del cilindro dado (fig. 263). Entonces el cilindro puede considerarse como un cuerpo con

secciones paralelas, cuya área es igual a Q. Por eso, utilizando la fórmula (1) del § 83, obtenemos

$$V=\int_0^H Q\,dx=Q\int_0^H dx=QH. \blacksquare$$

Corolario 1. *El volumen del prisma es igual al producto del área de su base por la altura.*

□ En efecto, el prisma es un cilindro, cuya base es un polígono. ■

Corolario 2. *Si la base del cilindro es una elipse con los semiejes a y b, entonces*

$$V=\pi abH, \tag{2}$$

donde H es la altura del cilindro. En particular, si la base del cilindro es el círculo de radio R, entonces

$$V=\pi R^2H. \tag{3}$$

□ El área de la base (fig. 264) se calcula por la fórmula

$$Q=2\int_{-a}^{a}\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx.$$

Para calcular la integral hagamos la sustitución

$$x=a\cos t,\quad t\in[0;\ \pi];$$

$$dx=-a\operatorname{sen}t\,dt.$$

Entonces

$$Q=2ab\int_0^{\pi}\operatorname{sen}^2 t\,dt=ab\int_0^{\pi}(1-\cos 2t)\,dt=\pi ab.$$

Por consiguiente, el área de la figura limitada por la elipse con los semiejes a y b es igual a πab.

Sustituyendo el valor hallado para Q en la fórmula (1), obtendremos la fórmula (2). En particular, si $a=b=R$, obtendremos la fórmula (3). ■

Teorema 2. *El volumen de un cilindro inclinado es igual al producto del área de su sección perpendicular por la longitud de la generatriz.*

Demostremos este teorema sólo para un caso particular, o sea, cuando el cilindro es un prisma. Para el prisma el teorema 2 se enuncia en la forma siguiente:

el volumen de un prisma inclinado es igual al producto del área de su sección perpendicular por la longitud de la arista lateral.

□ Puesto que cualquier prisma puede dividirse en prismas triangulares, la suma de cuyos volúmenes es igual al volumen del prisma dado, es suficiente efectuar la demostración para el prisma triangular.

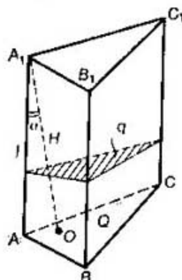


Fig. 265

Examinemos el prisma inclinado $ABCA_1B_1C_1$ (fig. 265). Sea que l es la longitud de la arista lateral, Q es el área de la base, y H es la altura del prisma. Designemos con α la magnitud del ángulo entre el plano de la base y el plano de la sección perpendicular del prisma.

Dado que la altura del prisma OA_1 forma con la arista lateral AA_1 un ángulo de magnitud α, entonces del $\triangle AA_1O$ obtenemos: $H = l \cos \alpha$. Por lo tanto

$$V = QH = Ql \cos \alpha = ql,$$

donde $q = Q \cos \alpha$ es el área de la sección perpendicular del prisma.

Problema. La longitud de la arista lateral de un prisma triangular es igual a 15 cm, y las distancias entre las aristas laterales son iguales a 17 cm, 25 cm y 26 cm. Hállese el volumen del prisma.

△ La sección perpendicular de un prisma dado es un triángulo con los lados cuyas longitudes son de 17 cm, 25 cm y 26 cm. No es difícil calcular que su área es igual a 204 cm². Por eso en virtud del teorema 2

$$V = 204 \text{ cm}^2 \cdot 15 \text{ cm} = 3060 \text{ cm}^3. \ ▲$$

§ 88. Volumen de la pirámide y de la pirámide truncada

Teorema 1. *El volumen de la pirámide es igual a un tercio del producto del área de la base por la altura, es decir,*

$$V = \frac{1}{3} QH, \tag{1}$$

donde Q es el área de la base, y H es la altura de la pirámide.

□ Tracemos a través del vértice de la pirámide un plano p, paralelo al plano de la base (fig. 266). Elijamos el eje Ox del modo siguiente: el punto O está situado en el plano p, el eje Ox es perpendicular a p y está dirigido a la base de la pirámide. Entonces, la abscisa del vértice es igual a cero, y la abscisa del punto A de intersección del plano de la base con el eje Ox es igual a la altura de la pirámide H.

Designemos con $S(x)$ el área de la sección de la pirámide por el plano, que pasa paralelamente a la base a una distancia del vértice igual a x. Como sabemos (§ 58) en la pirámide

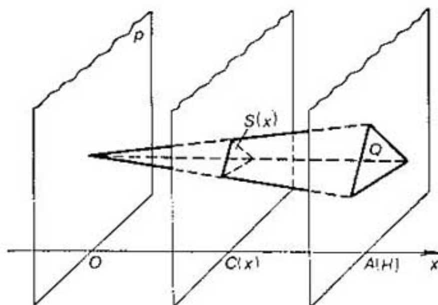


Fig. 266

el área de la base y el de una sección, paralela a la base, se relacionan como los cuadrados de sus distancias del vértice. Por lo tanto,

$$\frac{S(x)}{Q} = \frac{x^2}{H^2}, \quad \text{es decir,} \quad S(x) = \frac{Q}{H^2} x^2.$$

Para calcular el volumen de la pirámide apliquemos la fórmula (1) del § 83

$$V = \int_0^H \frac{Q}{H^2} x^2 \, dx = \frac{Q}{H^2} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^H = \frac{1}{3} QH. \blacksquare$$

Teorema 2. *El volumen de una pirámide truncada que tiene una altura igual a H y las áreas de las bases iguales a Q y q se calcula por la fórmula*

$$V = \frac{1}{3} H \left(q + Q + \sqrt{qQ}\right).$$

□ El volumen de la pirámide truncada $ABCDEA_1B_1C_1D_1E_1$ se puede hallar como la diferencia de los volúmenes de las pirámides $SABCDE$ y $SA_1B_1C_1D_1E_1$ (fig. 267).

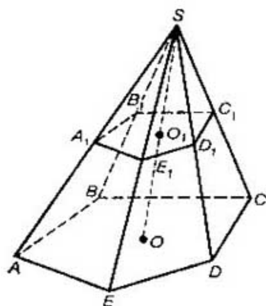


Fig. 267

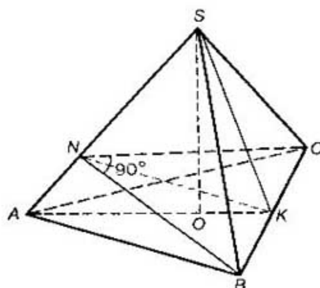


Fig. 268

Por lo tanto

$$V = \frac{1}{3} Q (H + h) - \frac{1}{3} qh,$$

donde h es la altura de la pirámide que completa la pirámide truncada hasta la pirámide normal. Puesto que $\frac{Q}{q} = \frac{(h+H)^2}{h^2}$, entonces

$$\frac{\sqrt{Q}}{\sqrt{q}} = 1 + \frac{H}{h}, \quad \frac{H}{h} = \frac{\sqrt{Q} - \sqrt{q}}{\sqrt{q}}$$

y, por consiguiente,

$$h = \frac{H\sqrt{q}}{\sqrt{Q} - \sqrt{q}}.$$

De este modo,

$$V = \frac{1}{3} QH + \frac{1}{3} h (Q - q) = \frac{1}{3} QH +$$

$$+ \frac{1}{3} H \sqrt{q} (\sqrt{Q} + \sqrt{q}) = \frac{1}{3} H (Q + \sqrt{qQ} + q). \blacksquare$$

Problema. Hállese el volumen de una pirámide triangular regular, la cual tiene un lado de la base igual a a y el ángulo entre las caras laterales igual a $90°$.

△ Sea que $SABC$ es la pirámide dada (fig. 268), y $\angle BNC$ es el ángulo lineal de un ángulo de dos caras con la arista AS.

Dado que el ΔABC es regular, $|AB| = a$, entonces $|BK| = \frac{a}{2}$, $|AK| = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Por consiguiente, para el área de la base obtenemos la expresión

$$Q = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

Hallemos la altura de la pirámide $H = |SO|$. Puesto que los triángulos ASO y ANK son rectangulares y tienen un ángulo agudo común, ellos son semejantes.

De la semejanza de estos triángulos se deduce que

$$\frac{|SO|}{|NK|} = \frac{|AS|}{|AK|}. \qquad (3)$$

Aquí $|NK| = |BK| = \frac{a}{2}$, ya que $\widehat{BNK} = 45°$;

$$|AS| = \sqrt{|OS|^2 + |AO|^2} = \sqrt{H^2 + \frac{a^2}{3}}.$$

Por consiguiente, de (3) obtenemos:

$$H = \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{H^2 + \frac{a^2}{3}}, \quad 2H^2 = \frac{a^2}{3}, \quad H = \frac{a}{\sqrt{6}}.$$

Así pues,

$$V = \frac{1}{3} QH = \frac{a^3}{12\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{24} a^3. \ ▲$$

§ 89 *. Volumen de un cono arbitrario

Teorema. *El volumen de un cono arbitrario es igual a un tercio del producto del área de la base por la altura, es decir,*

$$V = \frac{1}{3} QH, \qquad (1)$$

donde Q es el área de la base, y H es la altura del cono.

□ Examinemos un cono con el vértice S y la base Φ (fig. 269). Sea que el área de la base Φ es igual a Q, y la altura del cono, a H. Entonces, existen las sucesiones de los polígonos Φ_n y Φ'_n con las áreas Q_n y Q'_n tales, que $\Phi_n \subset \Phi \subset \Phi'_n$ y $\lim\limits_{n\to\infty} Q'_n = \lim\limits_{n\to\infty} Q_n = Q$.

Es evidente, que la pirámide con el vértice S y la base Φ'_n será inscrita en el cono dado, y la pirámide con el vértice S y la base Φ_n será circunscrita alrededor del cono.

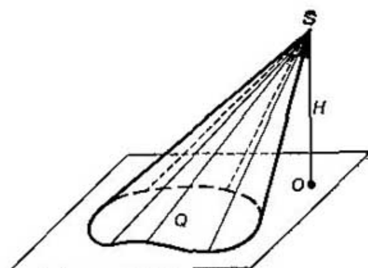


Fig. 269

Los volúmenes de estas pirámides son respectivamente iguales a

$$V_n = \frac{1}{3} Q_n H \quad \text{y} \quad V'_n = \frac{1}{3} Q'_n H.$$

Dado que

$$\lim_{n \to \infty} V_n = \lim_{n \to \infty} V'_n = \frac{1}{3} QH,$$

la fórmula (1) queda demostrada. ■

Corolario. *El volumen del cono, cuya base es una elipse con los semiejes a y b se calcula según la fórmula*

$$V = \frac{1}{3} \pi abH. \tag{2}$$

En particular, *el volumen del cono, cuya base es un círculo de radio R, se calcula según la fórmula*

$$V = \frac{1}{3} \pi R^2 H, \tag{3}$$

donde H es la altura del cono.

Como sabemos (§ 87), el área de una elipse con los semiejes a y b es igual a πab y, por lo tanto, la fórmula (2) se obtiene de la (1), cuando $Q = \pi ab$. Si $a = b = R$, se obtiene la fórmula (3). ■

§ 90. Area de la superficie del cilindro, del cono y del cono truncado

Por área de la superficie lateral del cilindro se toma el área de la desarrollante de su superficie lateral. Por lo tanto, *el área de la superficie lateral de un cilindro circular*

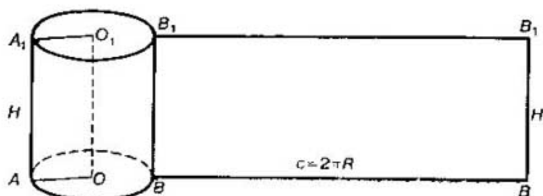


Fig. 270

recto es igual al área del rectángulo respectivo (fig. 270) y se calcula según la fórmula

$$S_{\text{l.c.}} = 2\pi RH, \tag{1}$$

donde R es el radio de la base, y H es la altura del cilindro. Si al área de la superficie lateral del cilindro adicionamos el área de sus dos bases, obtenemos *el área de la superficie total del cilindro*

$$S_{\text{tot.}} = 2\pi RH + 2\pi R^2 = 2\pi R\,(H + R).$$

Por área de la superficie total del cono se toma el área de la desarrollante de su superficie lateral. Por eso, *el área de la superficie lateral del cono circular recto* es igual al área del sector circular respectivo (fig. 271) y se calcula por la fórmula

$$S_{\text{l.k.}} = \pi RL, \tag{2}$$

donde R es el radio de la base, y L es la longitud de la generatriz del cono. Si al área de la superficie lateral del cono adicionamos el área de su base, obtendremos el área de la superficie total del cono

$$S_{\text{tot.}} = \pi RL + \pi R^2 = \pi R\,(L + R).$$

Análogamente, por área de la superficie lateral del cono truncado se toma el área de la desarrollante respectiva. Por

eso, en el caso del cono circular recto (fig. 272) *el área de la superficie lateral del cono truncado* se calcula por la fórmula

$$S_{\text{l.k.t.}} = \pi (r_1 + r) L,$$

donde r_1 y r son los radios de las bases, y L es la longitud de la generatriz del cono truncado,

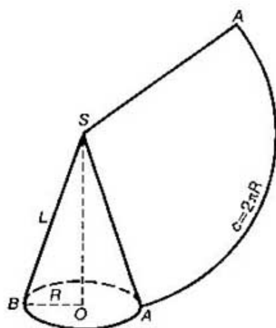


Fig. 271

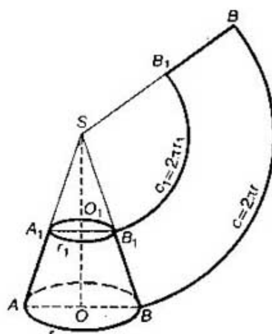


Fig. 272

Problema. En un cono está inscrito un cilindro (fig. 273). La altura del cono es 4 veces mayor que la altura del cilin-

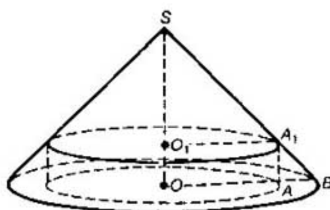


Fig. 273

dro, y la longitud de la generatriz del cono es 6 veces mayor que la altura del cilindro. Hállese la razón de las áreas de las superficies laterales del cono y del cilindro.

△ Según las fórmulas (1) y (2) obtenemos

$$S_{l.c.}=2\pi\,|OA|\,|OO|_1, \quad S_{l.k.}=\pi\,|OB|\,|KB|.$$

Según la condición $|KB|=6\,|OO_1|$. Por consiguiente,

$$\frac{S_{l.k.}}{S_{l.c.}}=\frac{3\,|OB|}{|OA|}.$$

De los triángulos semejantes OBK y O_1A_1K hallamos

$$\frac{|OB|}{|O_1A_1|}=\frac{|OK|}{|O_1K|}.$$

Según la condición $|OK|=4\,|O_1O|$. Por consiguiente,

$$\frac{|OB|}{|O_1A_1|}=\frac{4}{3}.$$

Teniendo en cuenta que $|O_1A_1|=|OA|$, obtenemos

$$\frac{S_{l.k.}}{S_{l.c.}}=3\cdot\frac{4}{3}=4,$$

es decir, el área de la superficie lateral del cono es 4 veces mayor que el área de la superficie lateral del cilindro. ▲

§ 91. Area de una superficie de revolución

El área de la superficie lateral para el cilindro y el cono fue definida con ayuda del área de la desarrollante. Sin embargo, tal procedimiento no es aplicable para cualquier superficie. Por ejemplo, no se puede desarrollar la esfera en un plano.

Definamos, para el caso general, el área de la superficie de revolución y demos la fórmula para calcularla.

Sea dado el arco AB de una curva (fig. 274), cuya ecuación $y=f(x)$, $x\in[a;\,b]$, donde $f(x)$ es una función no negativa, que tiene una derivada continua.

Dividamos el segmento $[a;\,b]$ por medio de los puntos

$$x_i=a+\frac{b-a}{n}\,i, \quad i=1,\ 2,\ \ldots,\ n-1,$$

en n segmentos de igual longitud. Tracemos a través de los puntos x_i rectas, paralelas al eje Oy y designemos con M_i los puntos de intersección de estas rectas con el arco AB,

La quebrada $AM_1M_2 \ldots M_{n-1}B$ se denomina *inscrita* en el arco AB.

Si la partición del segmento $[a; b]$ es bastante menuda, es decir, si n es bastante grande, las áreas de las superficies formadas por la rotación del arco AB alrededor del eje Ox y de la quebrada inscrita en el arco se diferenciarán poco entre sí.

La superficie engendrada por la revolución de la quebrada consta de las superficies laterales n de los conos truncados (o cilindros). Ya sabemos calcular su área.

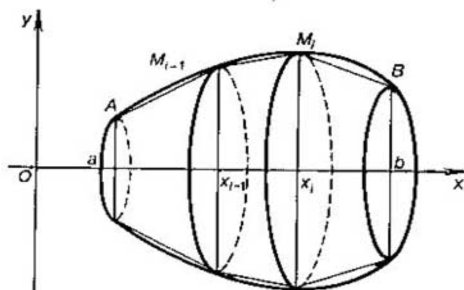


Fig. 274

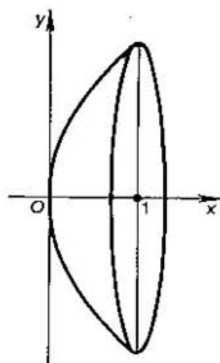


Fig. 275

Se denomina *área de la superficie* formada por la rotación del arco AB, el límite al cual tiende cuando $n \to \infty$, el área de la superficie, formada por la rotación de la quebrada $AM_1 \ldots M_{n-1}B$, inscrita en AB.

Se puede demostrar que el área de la superficie formada por la rotación de la curva AB alrededor del eje Ox se calcula por la fórmula

$$S = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx,$$

o, más breve,

$$S = 2\pi \int_a^b y \sqrt{1 + y'^2}\, dx. \qquad (1)$$

No presentamos la demostración de esta fórmula.

Problema 1. Hállese el área de la superficie obtenida por la rotación del arco de la parábola $y = 2\sqrt{x}, 0 \leqslant x \leqslant 1$ (fig. 275) alrededor del eje Ox.

△ Puesto que $y' = \frac{1}{\sqrt{x}}$, de acuerdo con la fórmula (1), el área de la superficie de revolución se expresará por la fórmula

$$S = 2\pi \int_0^1 2\sqrt{x}\sqrt{1+\frac{1}{x}}\,dx = 4\pi \int_0^1 \sqrt{1+x}\,dx,$$

de donde obtenemos

$$S = 4\pi \cdot \frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 = \frac{8\pi}{3}(2^{\frac{3}{2}} - 1).$$

Respuesta. $S = \frac{8\pi}{3}(2\sqrt{2} - 1)$. ▲

Si la curva AB está definida por las ecuaciones paramétricas $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in [\alpha; \beta]$, donde $\varphi(t)$ y $\psi(t)$ tienen derivadas continuas, entonces

$$S = 2\pi \int_\alpha^\beta |\psi(t)| \sqrt{(\varphi'(t))^2 + \psi'(t))^2}\,dt,$$

o, más breve,

$$S = 2\pi \int_\alpha^\beta |y| \sqrt{x'^2 + y'^2}\,dt. \qquad (2)$$

Problema 2. Calcúlese el área de la superficie formada por la rotación del arco de la cicloide

$$\begin{cases} x = a(t - \operatorname{sen} t), \\ y = a(1 - \cos t), \end{cases} \quad t \in [0; 2\pi],$$

alrededor del eje Ox.

△ Puesto que $x' = a(1 - \cos t)$ y $y' = a \operatorname{sen} t$, según la fórmula (2) obtenemos

$$S = 2\pi \int_0^{2\pi} a(1 - \cos t)\sqrt{a^2(1-\cos t)^2 + a^2 \operatorname{sen}^2 t}\,dt =$$

$$= 2\pi a^2 \int_0^{2\pi} (1-\cos t)\sqrt{2(1-\cos t)}\, dt = 8\pi a^2 \int_0^{2\pi} \times$$

$$\times \operatorname{sen}^3 \frac{t}{2}\, dt = 8\pi a^2 \int_0^{2\pi} \left(1-\cos^2\frac{t}{2}\right) \operatorname{sen}\frac{t}{2}\, dt.$$

Hagamos la sustitución: $u = \cos\frac{t}{2}$, $du = -\frac{1}{2} \operatorname{sen}\frac{t}{2}\, dt$. Entonces

$$S = 16\pi a^2 \int_{-1}^{1} (1-u^2)\, du = \frac{64}{3}\pi a^2.$$

Respuesta. $S = \frac{64}{3}\pi a^2$. ▲

§ 92. Area de la esfera y de sus partes

Teorema 1. *El área de la esfera de radio R se calcula según la fórmula*

$$S = 4\pi R^2. \qquad (1)$$

◄ La esfera de radio R puede ser obtenida por la revolución de la semicircunferencia definida por la ecuación

$$y = \sqrt{R^2 - x^2}, \quad x \in [-R;\ R],$$

alrededor del eje Ox.

Entonces, según la fórmula para el área de una superficie de revolución obtenemos

$$S = 2\pi \int_{-R}^{R} y\sqrt{1+y'^2}\, dx = 2\pi \int_{-R}^{R} \sqrt{R^2-x^2}\times$$

$$\times \sqrt{1+\frac{x^2}{R^2-x^2}}\, dx = 2\pi \int_{-R}^{R} R\, dx = 4\pi R^2. \quad ■$$

Análogamente se deduce la fórmula para el área de una zona esférica que se obtiene girando el arco de una circunferencia (fig. 276) $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, $x \in [a;\ b]$, en torno al eje Ox.

En efecto,

$$S=2\pi\int_a^b y\sqrt{1+y'^2}\,dx=2\pi\int_a^b R\,dx=2\pi R\,(b-a). \qquad (2)$$

Teorema 2. *El área de una zona esférica de radio R y altura H se calcula por la fórmula*

$$S = 2\pi RH. \qquad (3)$$

□ La fórmula (3) se obtiene de la fórmula (2), ya que $H = b - a$. ■

Un segmento esférico puede obtenerse por la revolución del arco de la circunferencia

$$y=\sqrt{R^2-x^2}, \quad a\leqslant x\leqslant R,$$

alrededor del eje Ox. Por consiguiente, el segmento esférico ès un caso particular de la zona esférica ($b = R$).

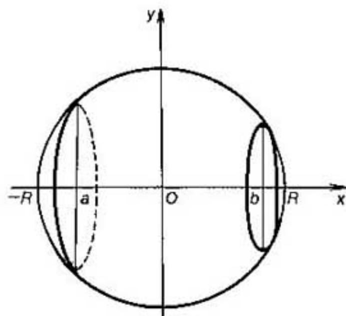


Fig. 276

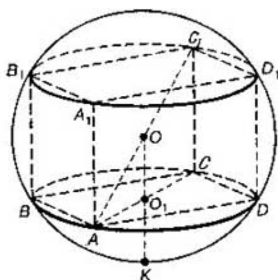


Fig. 277

Corolario. *El área del segmento esférico de radio R y altura H se calcula según la fórmula* (3).

Problema. En una esfera está inscrito un cubo con la arista a (fig. 277). Hállense las áreas:

a) de la esfera;

b) de la zona esférica cortada por los planos de las caras superior e inferior del cubo;

c) del segmento esférico cortado por el plano de la cara inferior del cubo.

△ a) La diagonal del cubo con la arista a es igual a $\sqrt{3}a$. Por consiguiente, $|AC_1| = \sqrt{3}a$. Por otro lado, si R es el radio de la esfera, $|AC_1| = 2R$. Por lo tanto, $2R = \sqrt{3}a$, es decir, $R = \frac{\sqrt{3}}{2}a$. Por la fórmula (1) hallamos el área S de la esfera:

$$S = 4\pi R^2 = 4\pi \frac{3}{4} a^2 = 3\pi a^2.$$

b) En el caso dado, es evidente que la altura de la zona esférica es igual a a. Considerando en la fórmula (3) $H = a$ y $R = \frac{\sqrt{3}}{2} a$, hallamos el área S_1 de la zona esférica

$$S_1 = 2\pi RH = 2\pi \frac{\sqrt{3}}{2} a^2 = \pi \sqrt{3} a^2.$$

c) La altura del segmento esférico es igual a la longitud del segmento O_1K. Calculémosla:

$$|O_1K| = |OK| - |OO_1| = R - \frac{a}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} a - \frac{a}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{2} a.$$

Considerando que en la fórmula (3) $H = \frac{\sqrt{3}-1}{2} a$ y $R = \frac{\sqrt{3}}{2} a$, hallamos el área del segmento esférico:

$$S_2 = 2\pi RH = 2\pi \frac{\sqrt{3}}{2} a \frac{\sqrt{3}-1}{2} a = \frac{3-\sqrt{3}}{2} a^2. \ ▲$$

Problemas para el capítulo VII

7.1. Los poliedros Φ_1 y Φ_2 tienen los volúmenes V_1 y V_2. Hállese el volumen de la figura $\Phi_1 \cup \Phi_2$, si se sabe que el volumen de la figura $\Phi_1 \cap \Phi_2$ es igual $0,5V_2$.

7.2. Los poliedros Φ_1 y Φ_2 tienen los volúmenes V_1 y V_2. ¿En qué caso el volumen de la figura $\Phi_1 \cup \Phi_2$ será igual a V_1?

7.3. Hállese la razón de los volúmenes de las partes del cubo cortado por el plano que pasa a través de su eje de simetría.

7.4. Se da el paralelepípedo rectangular, cuyo volumen es igual a V. Hállense los volúmenes de las partes del paralelepípedo cortado por el plano que pasa por su eje de simetría.

7.5. El cubo de volumen V está cortado por el plano que atraviesa su centro de simetría. Hállense los volúmenes de las partes del cubo.

7.6. La diagonal del cubo es igual a l. Hállese el volumen del cubo.

7.7. La diagonal de un paralelepípedo rectangular, cuya base es un cuadrado de lado a, es igual a l ($l > \sqrt{2}a$). Hállese el volumen del paralelepípedo dado.

7.8. Demuéstrese que el volumen del paralelepípedo rectangular es igual a $\sqrt{Q_1Q_2Q_3}$, si las áreas de sus caras son iguales a Q_1, Q_2 y Q_3.

7.9. Los lados de la base de un paralelepípedo recto son iguales a 7 cm y $\sqrt{18}$ cm y forman un ángulo de 45°, la diagonal menor del paralelepípedo forma con el plano de la base un ángulo de 45°. Hállese el volumen del paralelepípedo.

7.10. La diagonal de un paralelepípedo rectangular es igual a 12 cm y forma con el plano de la cara lateral un ángulo de 30° y con la arista lateral un ángulo de 45°. Hállese el volumen del paralelepípedo.

7.11. La diagonal del paralelepípedo rectangular es igual a l y forma con una cara un ángulo de 30° y con la otra, de 45°. Hállese el volumen del paralelepípedo.

7.12. La diagonal de un paralelepípedo rectangular forma con la base un ángulo de 60°, el ángulo diedro entre la sección diagonal y la cara lateral es igual a 45°. Hállese el volumen del paralelepípedo, si la diagonal de la base es igual a d.

7.13. En un paralelepípedo recto las aristas procedentes de un vértice son iguales a 1 m, 2 m y 3 m, además, las dos aristas menores forman un ángulo de 60°. Calcúlese el volumen del paralelepípedo.

7.14. En un paralelepípedo recto los lados de la base son iguales a 10 cm y 17 cm. Una de las diagonales de la base es igual a 21 cm, la diagonal mayor del paralelepípedo es igual a 29 cm. Calcúlese el volumen del paralelepípedo.

7.15. La diagonal de un paralelepípedo rectangular es igual a 13 cm, y las diagonales de sus caras laterales son iguales a $4\sqrt{10}$ cm y $3\sqrt{17}$ cm. Hállese el volumen del paralelepípedo.

7.16. De base de un paralelepípedo recto sirve un paralelogramo con un ángulo de 120° y los lados iguales a 3 cm y 4 cm. La diagonal menor del paralelepípedo es igual a la diagonal mayor de la base. Hállese el volumen del paralelepípedo.

7.17. En un paralelepípedo inclinado la proyección de una arista lateral sobre el plano de la base es igual a 5 cm, y la altura a 12 cm. La sección perpendicular a la arista lateral es un rombo con un área de 24 cm² y una diagonal igual a 8 cm. Hállese el volumen del paralelepípedo.

7.18. De base del paralelepípedo inclinado sirve un rombo con un lado igual a a y un ángulo agudo de 30°. La diagonal de una cara lateral es perpendicular al plano de la base, y la arista lateral forma con el plano de la base un ángulo de 60°. Hállese el volumen del paralelepípedo.

7.19. De un lingote de cobre que tiene la forma de un paralelepípedo rectangular de 80 cm × 20 cm × 5 cm de dimensiones, se lamina una hoja de 1 mm de espesor. Determínese el área de esta hoja.

7.20. De una hoja de lata cuadrada con un lado igual a a se fabricó un tanque del mayor volumen posible con una base cuadrada sin tapa. Hállense las dimensiones lineales del tanque.

7.21. De base de un prisma recto sirve un triángulo isósceles cuyos lados son iguales a 5 cm, 5 cm y 6 cm; la altura del prisma es

igual a la altura mayor de este triángulo. Hállese el volumen del prisma.

7.22. De base de un prisma recto sirve un triángulo con los lados de 7,5 cm, 6,5 cm y 7 cm, y la arista lateral del prisma igual a $1\frac{2}{7}$ cm. Calcúlese la arista del cubo equivalente al prisma dado.

7.23. La altura de un prisma triangular recto es igual a 6 m, su volumen es igual 2880 m³. Las áreas de las caras laterales se relacionan como 17 : 17 : 16. Hállense las longitudes de los lados de la base.

7.24. La longitud de la diagonal de un prisma cuadrangular regular es igual a 3,5 m, y la de la cara lateral es igual a 2,5 m. Hállese el volumen del prisma.

7.25. La diagonal de la longitud a de un prisma cuadrangular regular forma un ángulo de 30° con la cara lateral. Hállese el volumen del prisma.

7.26. En un prisma triangular regular el lado de la base es igual a a. Hállese el volumen del prisma, si la diagonal de la cara lateral forma un ángulo α con la otra cara lateral.

7.27. La base de un prisma recto es un triángulo isósceles con lados de 5 cm, 5 cm y 6 cm; la diagonal de la cara menor lateral forma un ángulo de 45° con la cara lateral mayor. Hállese el volumen del prisma.

7.28. En la base de un prisma recto se encuentra un triángulo con lados de 3 cm y 5 cm y un ángulo de 120° entre ellos. El área mayor de las caras laterales es igual a 35 cm². Hállese el volumen del prisma.

7.29. En la base de un prisma recto hay un triángulo rectangular con área S y un ángulo agudo igual a α. El área de la cara lateral mayor es igual a Q. Hállese el volumen del prisma.

7.30. La arista lateral de un prisma triangular regular es igual a la altura de la base, y el área de la sección trazada a través de esta arista lateral y la altura de la base es igual a Q. Hállese el volumen del prisma.

7.31. La longitud de una traviesa de ferrocarril es igual a 2,7 m, su sección transversal está representada en la figura 278 (las dimen-

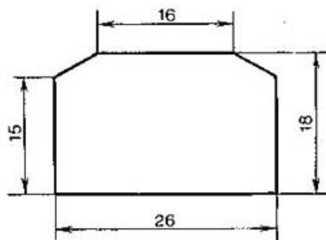


Fig. 278

siones se dan en centímetros). ¿Cuántas traviesas se pueden cargar en una plataforma cuya capacidad de carga es de 17 toneladas? (La densidad de la madera se admite igual a 0,8 g/cm³).

7.32. Una piscina para agua tiene la forma de un prisma cuadrangular regular y su volumen es igual a 32 m^3. El fondo y las paredes laterales de la piscina hay que cubrirlos con baldosas. ¿Cuáles deberán ser las dimensiones de la piscina para que la cantidad empleada de baldosas sea mínima? ¿Cuántas baldosas se requerirán, si su tamaño es de 20 cm $\times$ 20 cm?

7.33. En un cilindro, cuya altura es igual al diámetro de la base, está trazado un plano paralelo a su eje, que corta de la base un arco igual a 120°. El perímetro de la sección es igual a $(8 + 4\sqrt{3})$ cm. Calcúlese el volumen del cilindro.

7.34. La diagonal de la sección axial de un cilindro circular recto es igual a $d = 16$ cm y forma un ángulo de 60° con el plano de la base. Hállese el volumen del cilindro.

7.35. Un cilindro está formado por la rotación de un rectángulo, cuya área es igual a S, alrededor de uno de sus lados. Hállese el volumen del cilindro, si la longitud de la circunferencia, circunscrita por el punto de intersección de las diagonales del rectángulo, es igual a C.

7.36. En un cilindro circular recto el área de la sección perpendicular a la generatriz es igual a M, y el área de la sección axial es igual a N. Determínese el volumen del cilindro.

7.37. Paralelamente al eje del cilindro circular recto está trazada la sección distante del eje en d y que corta de la circunferencia de la base un arco de magnitud α. El área de la sección es igual a S. Hállese el volumen del cilindro.

7.38. Un árbol de acero, cuyo diámetro es igual a 8,4 cm y la longitud a 97 cm, se tornea de manera que su diámetro disminuya en 0,2 cm. ¿En cuánto disminuirá la masa del árbol después del torneado? (La densidad del acero es de 7,4 g/cm^3).

7.39. Durante la construcción del metro se utilizaron anillos de hormigón armado con un radio exterior de 5,5 m e interior de 5,1 m. ¿Cuál es el volumen de tal anillo si su longitud es de 100 m? ¿En qué por ciento disminuirá el volumen, si las longitudes de ambos radios se reducen en 0,4 m?

7.40. En un prisma inclinado los lados de la base son iguales a 4 cm, 13 cm y 15 cm. La arista lateral es igual a $10\sqrt{2}$ cm y está inclinada hacia el plano de la base bajo un ángulo de 45°. Calcúlese el volumen del prisma.

7.41. La base del prisma inclinado tiene la forma de un paralelogramo con lados de 6 dm y 12 dm y un ángulo agudo igual a 60°. La arista lateral del prisma es igual a 14 dm y forma con el plano de la base un ángulo igual a 30°. Hállese el volumen del prisma.

7.42. El paralelepípedo inclinado tiene como base un rombo con un ángulo agudo igual a α. Cada arista del paralelepípedo es igual a a. La arista lateral que pasa por el vértice del ángulo agudo del rombo forma con los lados de la base ángulos iguales a α. Hállese el volumen del paralelepípedo.

7.43. La base de un prisma inclinado tiene la forma de un triángulo equilátero con un lado igual a a. Una de las caras laterales del prisma es perpendicular al plano de la base y representa un rombo cuya diagonal es igual a b. Hállese el volumen del prisma.

7.44. La base del prisma tiene la forma de un trapecio isósceles, cuyas bases son iguales a 28 cm y 44 cm, y los lados laterales, a 17 cm.

Una de las secciones diagonales del prisma, perpendicular a la base, es un rombo con un ángulo igual a 45°. Hállese el volumen del prisma.

7.45. Todas las caras del paralelepípedo son rombos con diagonales iguales a 6 cm y 8 cm. Hállese el volumen del paralelepípedo.

7.46. La base del paralelepípedo inclinado tiene la forma de un rectángulo con lados a y b, y la arista lateral, igual a c, forma con los lados adyacentes de la base ángulos iguales a α. Hállese el volumen del paralelepípedo.

7.47. Calcúlese el volumen de la pirámide que tiene como base un rectángulo con lados de 6 cm y 8 cm, y cada arista lateral es igual a 13 cm.

7.48. La altura de una pirámide hexagonal regular es igua a 1 m, su apotema forma con la altura un ángulo de 30°. Calcúlese el volumen de la pirámide.

7.49. Las aristas laterales a, b y c de una pirámide triangular son recíprocamente perpendiculares. Demuéstrese que su volumen es igual a $\frac{abc}{6}$.

7.50. La superficie total de una pirámide cuadrangular regular es igual a 108 cm^2. El ángulo diedro de la base es igual a 60°. Calcúlese el volumen de la pirámide.

7.51. En una pirámide cuadrangular regular el lado de la base es igual a a, el ángulo plano del vértice, a α. Hállese el volumen de la pirámide.

7.52. La base de una pirámide es un rombo con lado a y ángulo agudo α. Todos los ángulos diedros de la base son iguales a φ. Hállese el volumen de la pirámide.

7.53. La base de una pirámide es un rombo con lado a y ángulo agudo α, la altura de la pirámide es igual a h. Hállese el volumen de la pirámide.

7.54. La base de una pirámide es un triángulo isósceles, cuya altura es igual a h, y el ángulo del vértice es α. La altura de la pirámide es igual a H. Hállese el volumen de la pirámide.

7.55. El área de la superficie de un tetraedro regular es igual a S. Hállese su volumen.

7.56. La pirámide Keops tiene la forma de una pirámide cuadrangular con una altura de ≈ 150 m y una arista lateral de ≈ 220 m. Hállese el volumen de la pirámide.

7.57. Uno de los diamantes extraídos en Yakutia tiene una masa de 42 quilates y la forma de un octaedro regular. Hállese la arista de este octaedro. (La densidad del diamante es de 3,5 g/cm^3, un quilate es igual a 0,2 g).

7.58. Las caras laterales de una pirámide triangular son recíprocamente perpendiculares, y sus áreas son iguales a a^2, b^2 y c^2. Determínese el volumen de la pirámide.

7.59. En una pirámide triangular truncada la altura es igual a 10 m, los lados de la base inferior son iguales a 27 m, 29 m y 52 m, y el perímetro de la base superior es igual a 72 m. Determínese el volumen de la pirámide truncada.

7.60. Los lados de la base de una pirámide cuadrangular truncada regular son iguales a 40 cm y 10 cm. El área de la superficie total de la pirámide es igual a 3400 cm^2. Calcúlese el volumen de la pirámide truncada.

7.61. En una pirámide a través del punto medio de la altura está trazado un plano paralelo a la base. Determínese el volumen de la pirámide truncada formada, si la altura de la misma es igual a 18 cm, y el área de la base es de 400 cm².

7.62. Los lados de las bases de una pirámide triangular truncada son iguales a a y b ($a > b$), el ángulo diedro de la base mayor es igual a α. Hállese el volumen de la pirámide truncada.

7.63. En una pirámide cuadrangular truncada regular los lados de la base son iguales a a y b ($a > b$), el ángulo agudo de la cara lateral es igual a α. Determínese el volumen de la pirámide truncada.

7.64. El lado de la base de una pirámide triangular regular es igual a a, el ángulo entre las caras laterales es igual a φ. Hállese el área de la superficie lateral.

7.65. Calcúlense los volúmenes de los cuerpos formados por rotación en torno al eje Ox de las figuras planas limitadas por las líneas:

a) $y = \operatorname{sen} x, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi, \quad$ y $\quad y = 0$;

b) $xy = 4, \quad y = 0, \quad x = 1, \quad x = 4$;

c) $y = x^2, \quad y = 1$;

d) $y = \dfrac{x^2}{2}, \quad y = -x + \dfrac{3}{2}$;

e) $y = \operatorname{sen} x, \quad y = \dfrac{2}{\pi} x, \quad x > 0$;

f) $y^2 = x, \quad x^2 = y$; g) $y^2 = (x-1)^3, \quad x = 2$;

h) $x^2 - y^2 = 1, \quad x = a + 1 \ (a > 0)$.

7.66. La generatriz de un cono es igual a $\sqrt{6}$ cm y forma un ángulo de 45° con el plano de la base. Hállese el volumen del cono.

7.67. La sección axial de un cono es un triángulo regular con un lado de 6 cm. Hállese el volumen del cono.

7.68. Hállese el volumen del cono cuyo diámetro de base es igual a 6 cm, y el ángulo entre la generatriz y el plano de la base es igual a 30°.

7.69. El ángulo del vértice de la sección axial de un cono es igual a 90°, el área de la sección es igual a 18 cm². Hállese el volumen del cono.

7.70. A través del vértice de un cono bajo el ángulo φ se trazó un plano hacia la base, que corta de la circunferencia de la base el arco φ; la distancia entre el plano de la sección y el centro de la base es igual a d. Determínese el volumen del cono.

7.71. Un triángulo rectangular con catetos iguales a 8 cm y 15 cm gira alrededor del cateto mayor. Calcúlese el volumen del cuerpo de revolución.

7.72. A través del vértice de un cono bajo un ángulo de 45° está trazado un plano hacia la base, que corta un cuarto de la circunferencia de la base de radio $R = 3$ cm. Calcúlese el volumen del cono.

7.73. Un triángulo con lados iguales a 10 dm, 17 dm y 22 dm gira alrededor del lado mayor. Determínese el volumen del cuerpo de revolución.

7.74. Un triángulo rectangular, cuya área es igual a S y el ángulo agudo igual a α gira alrededor del eje que contiene la hipotenusa. Hállese el volumen del cuerpo de revolución.

7.75. Un triángulo isósceles, cuya base es igual a a y el ángulo de la base es igual a α, gira alrededor del eje que contiene la base. Hállese el volumen del cuerpo de revolución.

7.76. Un triángulo rectangular con área S y ángulo agudo α gira alrededor del eje, trazado a través del vértice de un ángulo recto paralelamente a la hipotenusa. Hállese el volumen del cuerpo de revolución.

7.77. Un triángulo isósceles, cuyo ángulo del vértice es igual a β, y el lado lateral, a m, gira alrededor del eje que contiene el lado lateral. Hállese el volumen del cuerpo de revolución.

7.78. Un montón cónico de grano tiene una altura de 2,4 m, y una circunferencia de base de 20 m. ¿Cuántas toneladas de grano hay en el montón, si la masa de 1 m^3 de grano es igual a 750 kg?

7.79. El cascajo se coloca en un montón que tiene la forma de un cono con una inclinación del talud igual a 33°. ¿Qué altura debe tener el montón para que su volumen sea igual a 10 m^3?

7.80. Los radios de las bases de un cono truncado son iguales a 1 dm y 9 dm, la generatriz es igual a 1 m. Hállese el volumen del cono truncado.

7.81. Los radios de las bases de un cono truncado y su altura se relacionan como 3 : 6 : 4. Calcúlese el volumen del cono truncado, si su generatriz es igual a 25 cm.

7.82. Un trapecio isósceles con un ángulo agudo igual a 60° gira alrededor del eje que pasa por su lado lateral. Calcúlese el volumen del cuerpo de revolución, si las bases del trapecio son iguales a 6 cm y 20 cm.

7.83. Un rombo con lado a y un ángulo agudo α gira alrededor del eje que pasa a través del vértice de un ángulo agudo perpendicularmente a su lado. Hállese el volumen del cuerpo de revolución.

7.84. Un rombo con diagonal mayor d y ángulo agudo α, gira alrededor de una recta paralela al lado del rombo, que dista d del punto de intersección de las diagonales. Hállese el volumen del cuerpo de revolución.

7.85. Un tronco de 15,5 m de longitud tiene los diámetros de los extremos iguales a 42 cm y 35 cm. Hállese el error relativo admisible, calculando el volumen del tronco por multiplicación del área de la sección transversal media del tronco por su longitud.

7.86. ¿Qué cuerpo tiene mayor volumen: la esfera de radio 1 dm o el prisma triangular regular, cada arista del cual es igual a 2 dm?

7.87. El modelo de una esfera con un diámetro de 12 cm y el modelo de un cubo con una arista de 1 dm están fabricados del mismo material. ¿Qué modelo tiene menor masa?

7.88. El radio OM divide un semicírculo con diámetro AB en dos sectores de modo que $AMB = 120°$. Hállese la razón de los volúmenes de las figuras formadas por la rotación de estos sectores alrededor de (AB).

7.89. La sección de una esfera por un plano perpendicular a su diámetro divide el diámetro en relación 1 : 2. Hállese la relación de los volúmenes de las partes de la esfera.

7.90. La sección de un globo por un plano, perpendicular a su radio, divide el radio por la mitad. Hállese la relación de los volúmenes de las partes del globo.

7.91. Calcúlese el volumen de un segmento esférico, si el radio de la circunferencia de su base es igual a 56 cm, y el radio del globo es igual a 65 cm.

7.92. El sector AOB con un ángulo $\widehat{AOB}$ igual a 30° gira alrededor de la recta ON, perpendicular a $|OB|$. Hállese el volumen del cuerpo de revolución, si el radio del sector es igual a R.

7.93. En una esfera de radio R esta formado un sector con ángulo α en la sección axial. Hállese su volumen.

7.94. En una esfera de radio 2 dm se taladró un orificio cilíndrico a lo largo de su diámetro. Calcúlese el volumen de la parte restante, si el radio del orificio es igual a 1 dm.

7.95. El arco de la sección axial de un sector esférico es igual a 120°. Hállese la razón entre su volumen y volumen del segmento esférico correspondiente.

7.96. Calcúlese el volumen de una esfera circunscrita alrededor de un cubo cuya arista es igual a 1 m.

7.97. Un lado de la base de un tetraedro regular es igual a a, el ángulo diedro de la base es igual a φ. Determínese el volumen de la esfera inscrita en el tetraedro.

7.98. En una esfera, cuyo volumen es igual a V, está inscrito un prisma triangular recto. La base del prisma es un triángulo rectangular con un ángulo agudo igual a α, y la cara lateral mayor es un cuadrado. Hállese el volumen del prisma.

7.99. En una esfera de radio R está inscrito un cono, cuya generatriz forma con la altura el ángulo α. Hállese el volumen del cono.

7.100. En una esfera de radio R está inscrita una pirámide cuadrangular, cuyas aristas laterales están inclinadas hacia el plano de la base de la pirámide bajo el ángulo φ. Determínese el volumen de la pirámide, si en su base está situado un rectángulo, cuya diagonal forma con el lado mayor un ángulo igual a α.

7.101. Hállese el volumen de una esfera inscrita en una pirámide triangular regular con la arista de la base igual a a y el ángulo plano del vértice igual a α.

7.102. En un cono está inscrita una esfera, cuyo área del círculo mayor es igual a S. Hállese el volumen del cono, si el ángulo entre su altura y la generatriz es igual a α.

7.103. En un cilindro está inscrito un prisma cuadrangular, dos aristas laterales del cual están situados en la sección axial del cilindro, y las otras dos, en un plano perpendicular a esta sección. En una de las aristas el ángulo diedro es igual a α. La altura del prisma es igual al perímetro de su base, y la suma de las diagonales de la base es igual a s. Hállese el volumen del prisma.

7.104. Alrededor de un cono está circunscrita una pirámide. La base de la pirámide es un triángulo rectangular, uno de los ángulos agudos del cual es igual a α. Determínese el volumen del cono, si sabemos que el radio de su base es igual a r y la generatriz está inclinada hacia el plano de la base bajo el ángulo β.

7.105. El área de la sección axial de un cilindro es igual a Q. Hállese el área de la superficie lateral del cilindro.

7.106. La diagonal de la desarrollante de la superficie lateral

de un cilindro es igual a l y forma el ángulo α con el lado de la desarrollante de la circunferencia respectiva de la base del cilindro. Hállese el área de la superficie total del cilindro.

7.107. El segmento que une los puntos diametralmente opuestos de las bases superior e inferior del cilindro, es igual a 10 cm y está inclinado hacia el plano de la base bajo un ángulo de 60°. Hállese el área de las superficies lateral y total del cilindro.

7.108. ¿Cuántos metros cuadrados de hojalata se consumen en la fabricación de 1 millón de latas de conserva de 10 cm de diámetro y 5 cm de altura (para desechos y costuras se debe adicionar el 10% del material)?

7.109. La altura de un cilindro es igual a h, la diagonal de la sección axial forma el ángulo φ con el plano de la base. Hállese el área de la superficie lateral del cilindro.

7.110. Un lado del rectángulo es igual a h, el ángulo entre sus diagonales es igual a φ. Hállese el área de la superficie lateral del cilindro, formado por la rotación del rectángulo alrededor del eje que contiene el lado dado.

7.111. Un cuadrado con un lado igual a a gira en torno al eje que es paralelo a su lado y se encuentra del lado más próximo a una distancia igual al largo de éste. Hállese el área de la superficie del cuerpo de revolución.

7.112. La generatriz del cono es igual a l, el ángulo del vértice de la sección axial es igual φ. Hállese el área de las superficies lateral y total del cono.

7.113. El área de la base del cono es Q, la longitud de la generatriz es l. Hállense las áreas de las superficies lateral y total del cono.

7.114. El techo cónico de un silo de torre tiene un diámetro de 6 m y una altura de 2 m. ¿Cuántas hojas de hierro para techar se requerirá para este techo, si el tamaño de una hoja es de 0,7 m × 1,4 m, y para las costuras y recortes se emplea el 10% del área total del techo?

7.115. Un triángulo rectangular con un cateto igual a a y con un ángulo opuesto a él igual a 30°, gira alrededor de la hipotenusa. Hállese el área de la superficie de la figura de revolución obtenida.

7.116. Un triángulo isósceles cuya longitud de la base es igual a b, y el ángulo del vértice, a φ, gira en torno a la base. Hállese el área de la superficie de la figura de revolución obtenida.

7.117. Los lados de un paralelogramo son iguales a a y b, y el ángulo entre ellos es igual a α. Hállese el área de la superficie de un cuerpo, formado por la rotación del paralelogramo alrededor del lado b.

7.118. Calcúlense las áreas de las superficies formadas por la rotación de las siguientes curvas en torno al eje Ox:

a) $y=x^3, \quad 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$; b) $y^2=2px, \quad 0 \leqslant x \leqslant \frac{p}{2}$;

c) $y=\operatorname{sen} x, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi$;

d) $x^2+(y-b)^2=a^2 \ (b \geqslant a)$;

e) $\begin{cases} x=a\cos^3 t, \\ y=a\operatorname{sen}^3 t; \end{cases}$ f) $\begin{cases} x=t^2, \\ y=\frac{t}{3}(t^2-3), \quad 0 \leqslant t \leqslant \sqrt{3}; \end{cases}$

g) $\begin{cases} x = 2\cos t - \cos 2t, \\ y = 2\,\text{sen}\, t - \text{sen}\, 2t. \end{cases}$

7.119. En una esfera por un lado del centro están trazadas dos secciones paralelas, cuyas áreas son iguales a 49π dm^2 y 4π m^2. Hállese el área de la superficie de la esfera, si la distancia entre las secciones es igual a 9 dm.

7.120. La arista de un cubo es igual a a. Una esfera pasa por cuatro vértices de la base inferior del cubo y es tangente a las cuatro aristas de su base superior. Hállese el área de la esfera.

7.121. Hállese el área de la zona esférica, si los radios de sus bases son iguales a 20 m y 24 m y el radio de la esfera es igual a 25 m.

7.122. ¿A qué distancia del centro de la esfera de radio R se encuentra un manantial puntiforme de luz, si él ilumina un tercio de la superficie de la esfera?

7.123. Considerando que el radio del globo terráqueo es igual a 6400 km, hállese el área de aquella parte de la superficie terrestre, que se observa por el cosmonauta desde la nave cósmica a la altura de 300 km de la superficie de la Tierra.

Indicación. Considérese, que la parte visible de la superficie terrestre es un segmento esférico.

7.124. La distancia máxima de alejamiento de la nave cósmica «Vostok» de la superficie terrestre fue de 302 km, la distancia mínima, de 175 km. ¿Qué por ciento de la superficie terrestre pudo observar Y. A. Gagarin en esos momentos? El radio de la Tierra es igual a 6370 km.

RESPESTAS

Capítulo I

1.2. a) 0; b) 0; c) 0; d) 0; e) $2\boldsymbol{b}$ ó $2\boldsymbol{d}$; f) **0**; g) $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{d}$ ó $-\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$; h) $\boldsymbol{d}$ ó $\boldsymbol{a}$. **1.3.** a) $\boldsymbol{b}$; b) $-\boldsymbol{b}$; c) 0; d) **0**. **1.4.** 10 H. **1.5.** 0. **1.6.** 2 H. **1.7.** $3\overrightarrow{MO}$. **1.9.** a) $\overrightarrow{AS}$; b) $\overrightarrow{AB}$. **1.11.** a) $k=\pm 1$; b) $|k|>1$; c) $|k|<1$. **1.12.** a) $k=\pm 1$; b) $|k|>3$; c) $|k|<5$. **1.13.** a) $\frac{5}{|\boldsymbol{a}|}$; b) $-\frac{1}{|\boldsymbol{a}|}$. **1.14.** $-\frac{1}{2}\overrightarrow{PM}$. **1.15.** $-2\overrightarrow{CB}$. **1.16.** $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$; $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$; $\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{a}$; $\boldsymbol{a}-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$; $\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{a}$. **1.17.** $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$; $\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$; $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$; $-\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$. **1.18.** $2\boldsymbol{m}$; $2\boldsymbol{n}-2\boldsymbol{m}$; $2\boldsymbol{n}$; $2\boldsymbol{m}+\boldsymbol{n}$; $\boldsymbol{m}+3\boldsymbol{n}$; $\boldsymbol{m}-2\boldsymbol{n}$. **1.19.** a) $\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{OB}$; b) $2\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}$. **1.20.** $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$; b) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}$; c) $\boldsymbol{a}$; d) $-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$; e) $\boldsymbol{b}$; f) $-\boldsymbol{c}$; g) $-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$; h) $-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}-\frac{1}{2}\boldsymbol{c}$. **1.21.** $\left(\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}\right)$; $\left(-1;\ \frac{1}{2}\right)$; $\left(\frac{1}{2};\ -1\right)$. **1.22.** a) $\left(-\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}\right)$; b) $\left(\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}\right)$; c) (1; 0); d) $\left(\frac{1}{2};\ -\frac{1}{2}\right)$; e) $\left(-\frac{1}{2};\ -\frac{1}{2}\right)$; f) (1; 1); g) $\left(\frac{3}{2};\ \frac{1}{2}\right)$; h) (−1; 0); i) $\left(-\frac{3}{2};\ -\frac{1}{2}\right)$; j) (2; 0). **1.23.** $\overrightarrow{OE}=4\boldsymbol{i}$; $\overrightarrow{OA}=-2\boldsymbol{i}+2\sqrt{3}\,\boldsymbol{j}$; $\overrightarrow{AB}=2\boldsymbol{i}+2\sqrt{3}\,\boldsymbol{j}$; $\overrightarrow{OB}=4\sqrt{3}\,\boldsymbol{j}$; $\overrightarrow{BC}=4\boldsymbol{i}$; $\overrightarrow{CD}=2\boldsymbol{i}-2\sqrt{3}\,\boldsymbol{j}$; $\overrightarrow{DE}=-2\boldsymbol{i}-2\sqrt{3}\,\boldsymbol{j}$; $\overrightarrow{OC}=4\boldsymbol{i}+4\sqrt{3}\,\boldsymbol{j}$; $\overrightarrow{OD}=6\boldsymbol{i}+2\sqrt{3}\,\boldsymbol{j}$. **1.24.** a) $-\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+\frac{1}{2}\boldsymbol{k}$; b) $-\boldsymbol{i}+\boldsymbol{k}$; c) $\frac{1}{2}\boldsymbol{i}-\frac{1}{2}\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$; d) $\frac{1}{2}\boldsymbol{i}+\frac{1}{2}\boldsymbol{j}$; e) $-\boldsymbol{i}$; f) $\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$; g) $-\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$; h) $-\frac{1}{2}\boldsymbol{i}-\frac{1}{2}\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$. **1.25.** $\overrightarrow{AB}=(-4;\ 3;\ 0)$, $\overrightarrow{BA}=(4;\ -3;\ 0)$, $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{BA}|=5$, $\frac{\overrightarrow{BA}}{|\overrightarrow{BA}|}=\left(\frac{4}{5};\ -\frac{3}{5};\ 0\right)$.

1.26. $(-3;\ 0;\ \pm 2\sqrt{5})$. 1.27. $\sqrt{3}$; $\sqrt{11}$. 1.28. -1; $-\frac{1}{2}$. 1.29. a) $12\sqrt{2}$; b) 24; c) $-12\sqrt{2}$; d) 0; e) -24. 1.30. a) -10; b) 25; c) -39; d) 61; e) 1101. 1.31. a) 0; b) 3. 1.32. $-\frac{3}{2}$. 1.33. a) 0; b) 14; c) 34; d) 78. 1.34. $\left(\frac{4}{5};\ \frac{3}{5}\right)$; $\left(-\frac{4}{5};\ \frac{3}{5}\right)$. 1.36. 5. 1.37. 6. 1.38. -6. 1.39. a) 4; b) -6; c) para cualquier α. 1.40. $\alpha_1=-4$, $\beta_1=2$ y $\alpha_2=-8$, $\beta_2=-2$. 1.41. $b_1=4\sqrt{2}\,i+3\sqrt{2}\,j$; $b_2=-4\sqrt{2}\,i-3\sqrt{2}\,j$. 1.42. $x=(2;\ -3;\ 0)$. 1.43. a) $b=i+0{,}5j-0{,}5k$; b) $b=\left(-\frac{2}{9};\ \frac{4}{9};\ \frac{4}{9}\right)$. 1.44. a) $b=\frac{100}{7}i-\frac{150}{7}j-\frac{300}{7}k$; b) $b=(-24;\ 32;\ 30)$. 1.45. $x=(2;\ 3;\ -2)$. 1.46. $\cos(\widehat{a;\ i})=\frac{3}{5}$.

1.47. $\cos(\widehat{a;\ i})=\frac{3}{13}$; $\cos(\widehat{a;\ j})=-\frac{4}{13}$; $\cos(\widehat{a;\ k})=\frac{12}{13}$. 1.48. 90°. 1.49. 45°. 1.50. a) 90°; b) 90°; c) $\approx 146°$. 1.51. 90°, 45°, 45°. 1.52. $D(-1;\ 1;\ 1)$, $(\widehat{\overrightarrow{AC};\ \overrightarrow{BD}})=120°$. 1.53. 45°. 1.54. 90°. 1.55. $\cos\hat{B}=-\frac{1}{3}$. 1.56. a) $\frac{3}{\sqrt{26}}$; b) $\frac{3}{\sqrt{6}}$; c) $\frac{9}{\sqrt{38}}$; d) 0; e) $\frac{3}{\sqrt{6}}$. 1.57. a) Izquierda; b) ni izquierda y ni derecha, ya que los vectores son coplanares; b) derecha. 1.58. a) $6k$; b) $-12j$; c) $7i-2j-5k$. 1.59. 25 unidades cuadradas. 1.60. a) $-4i+7j+6k$; b) $i+2j+k$; c) $-3i+4j+2k$; d) $3i+6j+3k$; e) $-2i+6j+3k$; f) $4i-2j-k$; g) $4i-2j-6k$; h) $5i+10j+5k$; i) $20i+10j+20k$; j) $20i+10j+15k$. 1.61. $7\sqrt{5}$ unidades cuadradas. 1.62. 48 unidades cuadradas; 4,8 unidades lineales; 9,6 unidades lineales. 1.63. $\sqrt{429}$. 1.64. 210. 1.67. $4\,|\,a;\ b;\ c\,|$. 1.69. -50. 1.70. No son coplanares; la terna es derecha. 1.71. Son coplanares. 1.72. 27 unidades cúbicas. 1.73. $(3;\ -5)$. 1.74. $\left(\frac{5}{2};\ -2\right)$. 1.79. 13 unidades de trabajo. 1.80. $M=-2i-3j+6k$, $|M|=7$. 1.81. 2 H. 1.82. a) No; b) Sí. 1.84. $3\sqrt{5}$ unidades lineales.

Capítulo II

2.1. a), b), c) Sí; d) no. 2.3. a) Sí, b) no. 2.4. a) $\begin{cases} x=-1+3t, \\ y=2+2t; \end{cases}$ b) $\begin{cases} y=t, \\ y=1; \end{cases}$ c) $\begin{cases} x=3+t, \\ y=-2+3t; \end{cases}$ d) $\begin{cases} x=2, \\ y=-3t. \end{cases}$ 2.7. a) $\frac{x-3}{1}=\frac{y+4}{-4}$; b) $x=1$; c) $\frac{x-\frac{1}{2}}{-3}=\frac{y-1{,}5}{-2}$; d) $y=-3$. 2.9. $x=2$. 2.10. $(3;\ -7)$,

$a=(5;\ 4)$. **2.11.** $y=1$. **2.12.** $\begin{cases} x=2-7t, \\ y=-1+11t. \end{cases}$ **2.13.** a) $9x-y+15=0$; b) $x-7y+17=0$; b) $3x-5y-1=0$; c) $2x+3y=0$. **2.14.** $\frac{x}{9}+\frac{y}{6}=1$. **2.15.** $\frac{x}{5}+\frac{y}{-\frac{5}{7}}=1$. **2.16.** a) $(4;\ 0)$, $(0;\ -6)$; b) $\left(-\frac{3}{2};\ 0\right)$, $(0;\ 4)$. **2.17.** $(-3;\ 1)$. **2.18.** 6 unidades cuadradas. **2.19.** $\frac{x}{4}+\frac{y}{2}=1$. **2.20.** $x+y-6=0$. **2.21.** $\pm 2x+y-8=0$. **2.22.** 20 unidades cuadradas. **2.23.** (MP): $3x-y-2=0$; (NE): $x-5y+4=0$; (ND): $x+3y-12=0$. **2.24.** (AB): $2x-y+5=0$; (BC): $2x+y-9=0$; (AC): $2x-5y-15=0$; (AA_1): $x-y=0$; (BB_1): $10x-y-3=0$; (CC_1): $2x+7y-3=0$; $\left(\frac{1}{3};\ \frac{1}{3}\right)$. **2.25.** $2x-3y+4=0$. **2.26.** $2x-3y=0$. **2.28.** $4x-y-11=0$. **2.29.** $3x-2y-13=0$. **2.31.** $(-5;\ 6)$, $\boldsymbol{n}=\left(-3;\ \frac{1}{7}\right)$ **2.32.** $4x+y-5=0$. **2.34.** $y=4$. **2.35.** $2x+5y-26=0$. **2.36.** $x-y-7=0$. **2.37.** $2x+5y-4=0$ y $2x+5y+25=0$. **2.38.** $x-y+7=0$. **2.39.** $2x+3y+2=0$, $3x-2y+3=0$, $y=0$. **2.40.** a) $x-2y-5=0$, $\boldsymbol{n}=(1;\ -2)$; b) $4x-3y-10=0$, $\boldsymbol{n}=(4;\ -3)$; c) $2x+3y-6=0$, $\boldsymbol{n}=(2;\ 2)$; d) $x-15y-20=0$, $\boldsymbol{n}=(1;\ -15)$. **2.41.** a) $\frac{x}{3}+\frac{y}{-2}=1$; b) $\frac{x-3}{3}=\frac{y}{2}$; c) $\begin{cases} x=3+3t, \\ y=2t. \end{cases}$ **2.43.** a) $(3;\ 2)$; b) $(4;\ 3)$; c) $(2;\ 5)$; d) $(3;\ 2)$; e) no se intersecan. **2.44.** $\left(\frac{11}{6};\ \frac{35}{6}\right)$; $(-3;\ 1)$; $\left(9\frac{3}{7};\ -9\frac{5}{14}\right)$. **2.45.** $(-2;\ 5)$; $(1;\ -3)$; $(5;\ -9)$; $(8;\ -17)$. **2.46.** $(1;\ 3)$; $(2;\ 1)$; $(5;\ 4)$; $(6;\ 2)$. **2.48.** $x=4$; $y=-3$. **2.49.** $x=5$; $y=-2$. **2.50.** $y=\frac{2}{3}x$. **2.51.** $k=\frac{1}{5}$. **2.52.** $\alpha=135°$. **2.53.** $k=1$. **2.54.** $k=-\frac{1}{4}$. **2.56.** a) $=135°$; b) $=60°$; c) $\alpha=0°$; d) $\alpha=90°$. **2.57.** $\alpha\approx 121°$. **2.58.** $k=\frac{3}{7}$. **2.59.** $\operatorname{tg}\alpha=\frac{3}{4}$, $b=\frac{13}{4}$. **2.60.** La primera recta. **2.61.** $y=-2x-4$. **2.62.** a) $\varphi=60°$; b) $\varphi=60°$; c) $\varphi\approx 44°$; d) $\varphi\approx 53°$; e) $\varphi=0°$. **2.63.** a) Son paralelas; b) no son perpendiculares; c) no son paralelas ni perpendiculares. **2.64.** $b=18$. **2.65.** $a=\frac{1}{4}$. **2.66.** a) $\varphi=45°$; b) $\varphi=45°$; c) $\varphi\approx 38°$; d) $\varphi\approx 79°$; e) $\varphi=90°$. **2.67.** a) Son paralelas; b) son perpendiculares; c) no son paralelas ni perpendiculares. **2.68.** $a=1$. **2.69.** $b=1$. **2.70.** a) Coinciden; b) $(4;\ -4)$; c) son paralelas; d) son paralelas. **2.71.** a) $\varphi=45°$; b) $\varphi=60°$; c) $\varphi\approx 53°$; d) $\varphi\approx 63°$; e) $\varphi=0°$. **2.72.** a) Son paralelas; b) son perpendiculares; c) no son paralelas ni perpendiculares. **2.73.** $a=-3$. **2.74.** $a=-\frac{1}{5}$. **2.75.** a) $k=\frac{3}{4}$;

b) $k=-\frac{4}{3}$. **2.76.** a) $2x-3y-23=0$; b) $3x+2y-2=0$. **2.77.** $12x-18y+83=0$. **2.78.** $x-y-17{,}5=0$. **2.79.** $x+y-4=0$. **2.80.** a), d), e). **2.81.** a) $\frac{3}{5}x-\frac{4}{5}y-5=0$, $d=5$; b) $-\frac{3}{5}x+\frac{4}{5}y-20=0$. $d=20$; c) $-x-5=0$, $d=5$; d) $-\frac{5}{13}x+\frac{12}{13}y-2=0$, $d=2$; e) $-\frac{5}{13}x-\frac{12}{13}y-13=0$, $d=13$. **2.82.** $\frac{6}{\sqrt{13}}$. **2.83.** $\frac{1}{\sqrt{5}}x-\frac{2}{\sqrt{5}}y\pm3=0$. **2.84.** a) 5; b) 10. **2.85.** a) 2,5; b) 3; c) 6,5. **2.86.** $\frac{8}{\sqrt{13}}$. **2.87.** $5x+4y-23=0$, $d=\frac{3}{\sqrt{41}}$. **2.88.** $4x+3y+16=0$, $4x+3y-14=0$. **2.89.** $6x+4y-3=0$. **2.90.** $4x+y-6=0$, $3x+2y-7=0$.

Capítulo III

3.1. a) $x^2+y^2=16$; b) $x^2+y^2=\frac{16}{9}$; c) $(x+4)^2+(y-2)^2=25$; d) $(x+1)^2+\left(y+\frac{3}{5}\right)^2=\frac{49}{25}$. **3.2.** a) $(0;\ 0)$, $R=6$; b) $(0;\ 0)$, $R=\sqrt{7}$; c) $(5;\ 3)$, $R=7$; d) $\left(-7;\ -\frac{1}{2}\right)$, $R=8$; e) $(2{,}5;\ 0)$, $R=5\sqrt{2}$. **3.3.** a) $(1;\ -2)$, $R=5$; b) $(3;\ -5)$, $R=5$. **3.4.** $x^2+y^2=9$. **3.5** $(x-3^2)+(y-7)^2=49$. **3.6.** $(x-2)^2+(y-3)^2=4$. **3.7.** $(x-2)^2+(y+1)^2=25$. **3.8.** $(x-5)^2+y^2=9$, $(x-11)^2+y^2=9$. **3.9.** $(x-2)^2+(y\pm3)^2=9$. **3.10.** $(x-1)^2+(y-1)^2=1$, $(x-5)^2+(y-5)^2=25$. **3.11.** Fuera de la circunferencia; b) en la circunferencia; c) dentro de la circunferencia; d) fuera de la circunferencia; e) dentro de la circunferencia; f) fuera de la circunferencia. **3.12.** a) Corta; b) está tangente; c) pasa fuera de la circunferencia. **3.13.** $3x+2y-6=0$. **3.14.** $(x-6)^2+(y-6)^2=25$. **3.15.** $(x+2)^2+y^2=4$; $(0;\ 0)$, $(-2;\ 2)$, $(-2;\ -2)$. **3.16.** $(x-1{,}5)^2+(y-2)^2=6{,}25$. **3.17.** $(x-3{,}1)^2+(y+2{,}3)^2=22{,}1$. **3.18.** $\left(-\frac{19}{25};\ 6\frac{17}{25}\right)$, $(-2;\ -2)$. **3.19.** $3x-4y=0$. **3.20.** 8. **3.21.** $(x+2)^2+(y+1)^2=40$. **3.22.** $(x-5)^2+(y+2)^2=1$. **3.23.** $x^2+y^2=2$. **3.24.** $\begin{cases} x=5\cos t, \\ y=5\operatorname{sen} t. \end{cases}$

3.25. $(-4;\ 0)$. **3.26.** $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$. **3.28.** $(-3;\ 0)$, $(3;\ 0)$, $2c=6$. **3.29.** a) $\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{9}=1$; b) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$; c) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$; $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$. **3.30.** a) $a=4$, $b=3$, $(4;\ 0)$, $(-4;\ 0)$, $(0;\ -3)$, $F_1(\sqrt{7};\ 0)$, $F_2(-\sqrt{7};$

0); b) $a=2,\ b=\frac{2}{3}$, (2; 0), $\left(0;\ \frac{2}{3}\right)$, $\left(0;\ -\frac{2}{3}\right)$, $F_1\left(\frac{4\sqrt{2}}{3};\ 0\right)$, $F_2\left(-\frac{4\sqrt{2}}{3};\ 0\right)$; c) $a=\frac{1}{2}$, $b=\frac{1}{3}$, $\left(\frac{1}{2};\ 0\right)$, $\left(-\frac{1}{2};\ 0\right)$, $\left(0;\ \frac{1}{3}\right)$, $F_1\left(\frac{\sqrt{5}}{6};\ 0\right)$, $F_2\left(-\frac{\sqrt{5}}{6};\ 0\right)$; d) $a=2$, $b=1$, (2; 0), (−2; 0), (0; 1), (0; −1), $F_1(\sqrt{3};\ 0)$, $F_2(-\sqrt{3};\ 0)$. **3.31.** $\left(-3;\ \frac{8}{5}\right)$, $\left(-3;\ -\frac{8}{5}\right)$. **3.32.** $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{4}=1$. **3.33.** $a=5$, $b=3$, $2c=8$, $F_1(4;\ 0)$. $\varepsilon=\frac{4}{5}$. **3.34.** $2a=14$, $2b=10$, $F_1(-2\sqrt{6};\ 0)$, $F_2(2\sqrt{6};\ 0)$, $\varepsilon=\frac{2\sqrt{6}}{7}$. **3.35.** $\frac{x^2}{22}+\frac{y^2}{16}=1$. **3.36.** $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$. **3.37.** 0,0167. **3.38.** 0,0045. **3.39.** $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{16/3}=1$. **3.40.** $\varepsilon=0{,}6$. **3.41.** $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{25}-1$. **3.42.** $S=24$ unidades cuadradas. **3.43.** $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{36}=1$. **3.44.** $4\sqrt{3}$. **3.45.** 3 y 7. **3.46.** $x=3\cos t$ y $y=2\operatorname{sen} t$. **3.47.** $\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{16}=1$. **3.48.** $y=\frac{3}{5}x-3\sqrt{2}$ y $y=\frac{3}{5}x+3\sqrt{2}$. **3.49.** (4; −5). **3.50.** (0; −5) y (0; 5). **3.51.** $3x-y-12=0$. **3.52.** $\frac{x^2}{81}-\frac{y^2}{144}=1$. **3.53.** $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{14}=0$. **3.54.** (−6; 0) y (6; 0). **3.55.** a) $a=4$, $b=3$; b) $a=\frac{1}{4}$, $b=1$; c) $a=3$, $b=1$, d) $a=\frac{1}{4}$, $b=\frac{1}{3}$; e) $a=2$, $b=2$; f) $a=4$, $b=3$. **3.56.** a) 4 y 3; b) (−5; 0), (5; 0); c) (4; 0), (−4; 0); d) $y=\pm\frac{3}{4}k$. **3.57.** a) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$; b) $\frac{x^2}{28}-\frac{y^2}{36}=1$; c) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$; d) $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}=1$; e) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$; f) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$. **3.59.** $x=-5$ y $x=5$. **3.60.** $y=\pm\frac{3}{4}x$; $\varepsilon=\frac{5}{4}$. **3.61.** $y=\pm x$; $\varepsilon=\sqrt{2}$. **3.62.** $F_1(-5;\ 0)$, $F_2(5;\ 0)$, (−4; 0), (4; 0), $\varepsilon=\frac{5}{4}$, $y=\pm\frac{3}{4}x$. **3.63.** $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{24}=1$. **3.64.** $a=b$. **3.65.** $\frac{x^2}{20}-\frac{y^2}{5}=1$. **3.66.** $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{20}=1$. **3.67.** a) No; b) (4; 0) y $\left(5;\ \frac{9}{4}\right)$; b) $\left(5;\ \frac{9}{4}\right)$ es el punto de tangencia. **3.68.** $\frac{x^2}{28}-\frac{y^2}{36}=1$. **3.69.** $\frac{x^2}{4}-$

$-\frac{y^2}{12}=1$. **3.70.** $y=2x\pm\sqrt{3}$. **3.71.** Hipérbola. **3.72.** $y^2=16x$. **3.73.** $y^2=1{,}8x$. **3.74.** $\left(\frac{11}{4};\frac{\sqrt{55}}{2}\right)$, $\left(\frac{11}{4};-\frac{\sqrt{55}}{2}\right)$. **3.75.** $y^2=16x$. **3.76.** $y^2=4x$; $\alpha\approx 37°$. **3.77.** a) (0; 0), (4; 4); b) (0; 0), (4; —4); c) (4; 4); d) (1; 2), $\left(\frac{1}{9};\frac{2}{3}\right)$. **3.78.** $x-2y+6=0$. **3.79.** $(x-2)^2+y^2=16$; (2; 4), (2; —4). **3.80.** $\frac{x'^2}{9}+\frac{y'^2}{4}=1$. **3.81.** $x'^2-y'^2=4$. **3.82.** $y'^2=3x'$. **3.83.** a) $\sqrt{5}$ y $2\sqrt{3}$; $(-\sqrt{5};0)$, $(\sqrt{5};0)$, $(0;-2\times\sqrt{3})$, $(0;2\sqrt{3})$; $F_1(0;-\sqrt{7})$, $F_2(0;\sqrt{7})$; b) 4 y 3; (—3; 0), (3; 0), (0; —4), (0; 4); $F_1(0;-\sqrt{7})$, $F_2(0;\sqrt{7})$; c) 3 y $\frac{3}{2}$; $\left(-\frac{3}{2};0\right)$, $\left(\frac{3}{2};0\right)$, (0; —3), (0; 3); $F_1\left(0;-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$, $F_2\left(0;\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$. **3.84.** a) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$; b) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{36}=1$; c) $\frac{x^2}{28}+\frac{y^2}{64}=1$; d) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1$; e) $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{100}=1$. **3.85.** $\frac{x^2}{9}+\frac{(y-1)^2}{25}=1$. **3.86.** $\left(-\frac{\sqrt{21}}{2};2\right)$, $\left(\frac{\sqrt{21}}{2};2\right)$, $\left(\frac{-\sqrt{21}}{2};-2\right)$, $\left(\frac{\sqrt{21}}{2};-2\right)$. **3.87.** $\frac{(x-5)^2}{8}+\frac{(y-3)^2}{4}=1$. **3.88.** a) $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{9}=1$ ó $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{36}=1$; b) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=-1$; c) $\frac{x^2}{100}-\frac{y^2}{576}=-1$; d) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=-1$. **3.89.** a) 3 y 4; b) (0; —4), (0; 4); c) $F_1(0;-5)$, $F_2(0;5)$; d) $y=\pm\frac{3}{4}x$. **3.90.** $\frac{(x-3)^2}{144}-\frac{(y-2)^2}{25}=1$. **3.91.** $\frac{(x-3)^2}{25}-\frac{(y-2)^2}{16}=1$ ó $\frac{(x-3)^2}{16}-\frac{(y-2)^2}{25}=1$. **3.92.** a) $x^2=8y$; b) $x^2=-12y$; c) $y^2=6x$; d) $y^2=-10x$. **3.93.** $x^2=-12y$. **3.94.** $y^2=-24x$. **3.95.** $(y-5)^2=8(x+4)$, $y=5$, $x=-6$. **3.96.** $(y+4)^2=-4(x+2)$, (—6; 0). **3.97.** (4; 2) y (—4; 2). **3.99.** $x^2=y$. **3.100.** $y^2+9x-36=0$. **3.101.** $x^2=5y$; $y+1{,}25=0$. **3.102.** $2x-3y-2=0$. **3.103.** $90y=x^2$. **3.104.** a) Elipse; b) hipérbola; c) parábola d) parábola; e) un par de rectas que se cortan; f) un par de rectas paralelas; g) un punto; h) una circunferencia; i) elipse.

Capítulo IV

4.4. Seis rectas. **4.5.** Cuatro planos. **4.6.** No es válido. **4.7.** No es válido. **4.8.** Tres pares de aristas que se cruzan. **4.9.** 24. **4.11.** Para la construcción se puede tomar dos puntos arbitrarios:

uno situado en el plano de las rectas dadas, pero no penteneciente a ninguna de ellas y el otro, fuera del plano que pasa por las rectas dadas. La recta que atraviesa estos puntos es la buscada. **4.13.** Conjunto, todas las rectas son paralelas. **4.14.** Sí. **4.21.** a) 90°; b) 0°; c) 90°; d) 45°. **4.25.** $\frac{m\sqrt{3}}{2}$. **4.26.** 4 cm. **4.28.** $\frac{3a\sqrt{2}}{2}$ cm. **4.29.** $|MK| \approx 3{,}5$ cm. **4.31.** Rectangular. **4.39.** 45° y 135°. **4.40.** $\frac{3}{16}m^2$. **4.41.** $1{,}17\sqrt{5}$ cm². **4.46.** $\frac{3}{8}ah$. **4.47.** a) Se puede; b); c); d) no. **4.48.** 60°. **4.49.** $\approx 17{,}1$ cm; $\approx 20{,}1$ cm. **4.50.** 6 cm y 3 cm ó 4 cm y 7 cm. **4.51.** 4 cm, 8 cm, 12 cm. **4.52.** $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

4.53. $\frac{a\sqrt{6}}{2}$. **4.54.** $a\sqrt{2}$. **4.55.** $m\sqrt{\cos\beta}$. **4.56.** 50m². **4.57.** $\approx 10{,}1$ cm. **4.58.** 256 cm². **4.59.** 32 cm. **4.62.** Tetraedro y cubo. **4.63.** Icosaedro. **4.64.** $\arccos\frac{1}{3}$. **4.65.** $2\arccos\frac{\sqrt{3}}{3}$. **4.7.** $\approx 7{,}8$ H.

Capítulo V

5.1. a) $\overrightarrow{AM} = t(r_1 + r_2 + r_3)$; b) $\overrightarrow{CM} = t(r_1 + r_2 - r_3)$; c) $\overrightarrow{BM} = t(-r_1 r + {}_2 + r_3)$; d) $\overrightarrow{DM} = t(r_1 - r_2 + r_3)$; e) $\overrightarrow{CM} = t(r_1 - r_3)$ $t \in R$.

5.2. a) $\begin{cases} x = 1 + 2t, \\ y = 2 - 2t, \\ z = 3 + t; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x = 3 + t, \\ y = -2 - t, \\ z = \sqrt{2}\, t; \end{cases}$

c) $\begin{cases} x = \frac{1}{2}, \\ y = \frac{1}{3} + 3t, \\ z = \frac{1}{4} + 5t. \end{cases}$

5.3. a) $\frac{x+2}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z-1}{4}$; b) $\frac{x-2}{\sqrt{3}} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{1}$; b) $\frac{x-3}{0} = \frac{y}{1} = \frac{z+3}{0}$. **5.4.** a) $\frac{x-3}{5} = \frac{y+1}{4} = \frac{z}{-4}$; b) $\frac{x-4}{3} = \frac{y+1}{0} = \frac{z-2}{-2}$; c) $\frac{x}{2} = \frac{y-1}{0} = \frac{z+5}{0}$.

5.5. $\begin{cases} x = -7 + 8t, \\ y = 11 - 9t, \\ z = 6 - 12t; \end{cases}$ $\frac{x+7}{8} = \frac{y-11}{-9} = \frac{z-6}{-12}$.

5.6. $\begin{vmatrix} x+2 & y-3 & z-5 \\ 6 & -6 & -5 \\ 2 & 3 & -10 \end{vmatrix}=0$, $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{5}=1$;

b) $\begin{vmatrix} x-2 & y & z-4 \\ 1 & 1 & -6 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix}=0$, $\frac{x}{\frac{50}{23}}-\frac{y}{\frac{50}{17}}+\frac{z}{50}=1$;

c) $\begin{vmatrix} x-3 & y-1 & z+5 \\ 5 & 2 & 8 \\ -5 & -2 & 9 \end{vmatrix}=0$, $\frac{x}{\frac{1}{2}}-\frac{y}{\frac{1}{5}}=1$.

5.7. a) $2x+3y-13=0$; b) $4x-6y+z-40=0$; c) $7y-4z=0$; d) $y-2=0$. 5.8. a) $4x-7z+24=0$; b) $z+11=0$; c) $7x-2y+7z-37=0$. 5.9. $2y-z=0$. 5.10. $x+2z-4=0$. 5.11. 16 unidades cuadradas. 5.12. a) 45°; b) 90°; c) $\approx 70°$; d) 60°. 5.13. a) Son paralelas y no coinciden; b) son perpendiculares; c) se intersecan, pero no son perpendiculares; d) coinciden. 5.14. a) $k=\frac{28}{3}$; b) $k=0$; c) para cualquier k. 5.15. a) $\alpha=-\frac{9}{5}$, $\beta=-\frac{16}{3}$; b) $\alpha=0$, $\beta=\frac{16}{3}$; c) $\alpha=5$, β es un número cualquiera. 5.16. $8x-2y-5z-23=0$. 5.17. $2x+3y+z-11=0$. 5.18. $5y+3z+7=0$. 5.19. $\frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{7}=\frac{z}{4}$. 5.20. a) $\frac{x-\frac{1}{3}}{0}=\frac{y+\frac{7}{3}}{-3}=\frac{z}{-3}$; b) $\frac{x-\frac{3}{2}}{0}=\frac{y+5}{0}=\frac{z}{2}$; c) $-x=y=z$; d) $\frac{x+\frac{3}{11}}{0}=\frac{y-\frac{15}{11}}{1}=\frac{z}{11}$; e) $\frac{x}{7}=\frac{y}{0}=\frac{z}{0}$; f) $\frac{x-\frac{1}{3}}{0}=\frac{y}{3}=\frac{z}{-6}$. 5.21. $\frac{x}{0}=\frac{y}{4}=\frac{z-\frac{11}{4}}{3}$; $\frac{x}{2}=\frac{y}{0}=\frac{z-\frac{11}{4}}{1}$; $\frac{x}{3}=\frac{y-\frac{11}{3}}{2}=\frac{z}{0}$.

5.22. a) $\begin{cases} x=2+2t, \\ y=-1+7t, \\ z=4t; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x=3+t, \\ y=2+2t, \\ z=t. \end{cases}$

5.23. $2x+15y+7z+7=0$. 5.24. $5x+5z-8=0$. 5.25. a) $-\frac{3}{7}x+\frac{6}{7}y-\frac{2}{7}z-3=0$; b) $-\frac{5}{13}x-\frac{12}{13}y-2=0$; c) $-z-\frac{13}{2}=0$. 5.26. a) $\frac{7}{6}$; b) 4; c) 16. 5.27. a) 3; b) $\frac{11}{3}$; c) 14. 5.28. $\frac{6}{\sqrt{29}}$.

5.29. a) $\frac{75}{14}$; a) $\frac{15\sqrt{38}}{76}$; b) 0. **5.30.** a) 60°; b) 90°; c) $\approx 79°$.
5.31. a) Son perpendiculares; b) son paralelas; c) son paralelas; d) son perpendiculares. **5.32.** $\alpha=2$. **5.33.** $\frac{x}{0}=\frac{y}{3}=\frac{z}{-2}$. **5.34.** $\frac{x-2}{3}=\frac{y+3}{2}=\frac{z-4}{-5}$. **5.35.** a) No están situadas; b) están situadas; c) están situadas, d) no están situadas. **5.36.** a) Sí; b) no. **5.37.** a) Sí; b) no. **5.38.** a) 30°; b) $\approx 65°$; c) 0°. **5.39.** a) Son paralelas, la recta no está situada en el plano; b) son paralelas, la recta no está situada en el plano; c) se intersecan en el punto (0; 0; -2) no son perpendiculares; d) son perpendiculares, se intersecan en el punto (-2; 4; 4); e) la recta está situada en el plano. **5.40.** $\frac{x-2}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z+1}{-1}$. **5.41.** $11x+9y+7z-235=0$. **5.42.** $\alpha=-13$, $\beta=2$. **5.43.** $\begin{cases}3x+2y-z-5=0,\\ x-8y-13z+9=0.\end{cases}$ **5.44.** $\frac{x}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z}{0}$, $\frac{x}{1}=\frac{y}{0}=\frac{z+2}{1}$, $\frac{x}{0}=\frac{y}{1}=\frac{z+2}{1}$.

Capítulo VI

6.1. $x^2+y^2+z^2=36$. **6.2.** $x^2+y^2+z^2=9$. **6.3.** El punto A está situado dentro de la esfera; el punto B, en la esfera; el punto C, fuera de la esfera. **6.4.** a) (0; 1; -3), $R=9$; b) (2; -4; 1), $R=6\sqrt{2}$. **6.6.** a) Un punto; b) la circunferencia $x^2+z^2=\frac{3}{4}$, $y=\frac{1}{2}$; c) un conjunto vacío. **6.7.** La circunferencia $x^2+y^2=9$, $z=1$. **6.8.** El centro de la circunferencia está situado en el punto (1; 2; -1), $R=3$. **6.9.** $(x-2)^2+(y-3)^2+(z-4)^2=16$, C (2; 3; 4). **6.10.** $(x-4)^2+(y-1)^2+(z-2{,}5)^2=49{,}25$. **6.11.** $x^2+y^2+z^2=93$. **6.12.** (-5; 2; 5). **6.13.** $(x-8)^2+(y+5)^2+(z-5)^2=44$. **6.14.** $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{14}+\frac{z^2}{25}=1$. **6.15.** $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{36}=1$. **6.16.** $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}-\frac{z^2}{36}=1$. **6.17.** $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{4}=1$. **6.18.** $x^2+y^2=6z$. **6.19.** $x^2+y^2=0$. **6.20.** $9x^2-4y^2-4z^2=0$. **6.21.** $\frac{(x-z)^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$.
6.22. a) Una superficie cilíndrica circular, el eje de la superficie cilíndrica coincide con el eje Oz, $R=5$; b) una esfera con centro en el origen de coordenadas y radio $R=5$; b) una superficie cilíndrica elíptica con generatrices paralelas al eje Oz; d) una superficie cilíndrica hiperbólica con generatrices paralelas al eje Oz;

e) Una superficie cilíndrica parabólica. 6.23. $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{16}=0$. 6.24. $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{4}=0$. 6.25. Un paraboloide de rotación alrededor del eje Ox. 6.26. Un hiperboloide de rotación de dos hojas, por una hipérbola. 6.27. Un hiperboloide de rotación de una hoja, por una hipérbola. 6.28. Un paraboloide de revolución, por una parábola.

Capítulo VII

7.1. $V_1+0{,}5V_2$. Indicación. $V(\Phi_1\cup\Phi_2)=V(\Phi_1)+V(\Phi_2)-V(\Phi_1\cap\Phi_2)$. 7.2. $\Phi_2\subset\Phi_1$. 7.3. 1. 7.4. $0{,}5V$. 7.6. $\frac{l^3}{3\sqrt{3}}$. 7.7. $a^2\sqrt{l^2-2a^2}$. 7.9. 105 cm³. 7.10. $246\sqrt{2}$ cm³ ≈ 306 cm³. 7.11. $\frac{l^3\sqrt{2}}{8}$. 7.12. $\frac{d^3\sqrt{3}}{2}$. 7.13. $3\sqrt{3}$ m³ ≈ 5,2 m³. 7.14. 3360 cm³. 7.15. 144 cm³. 7.16. 360 cm³. 7.17. 312 cm³. 7.18. $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$. 7.19. 8 m². 7.20. $\frac{2a}{3}$ y $\frac{a}{6}$. 7.21. 57,6 cm³. 7.22. 3 cm. 7.23. 32 m, 34 m. 7.24. 6 m³. 7.25. $\frac{a^3\sqrt{2}}{8}$. 7.26. $\frac{a^3\sqrt{3}}{4\operatorname{sen}\alpha}\times\sqrt{\cos(30^\circ-\alpha)\cos(30^\circ+\alpha)}$. 7.27. $12\sqrt{7}$ cm³ ≈ 31,7 cm³. 7.28. $\frac{75\sqrt{3}}{4}$ cm³ ≈ 32,5 cm³. 7.29. $\frac{1}{2}Q\sqrt{S}\operatorname{sen}2\alpha$. 7.30. $Q\sqrt{\frac{Q}{3}}$. 7.31. ≈ 170. 7.32. 4 m × 4 m × 2 m, 1200. 7.33. 16π cm³. 7.34. $128\pi\times\sqrt{3}$ cm³. 7.35. CS. 7.36. $\frac{N}{2}\sqrt{\pi M}$. 7.37. $\frac{\pi\, dS}{\operatorname{sen}\alpha}$. 7.38. ≈ 1,9 kg. 7.39. 1300 m³; 7,5 %. 7.40. 240 cm³. 7.41. $252\sqrt{3}$ dm³ ≈ 436,5 dm³. 7.42. $2a^3\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\sqrt{\operatorname{sen}\frac{3\alpha}{2}\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}}$. 7.43. $\frac{ab\sqrt{12a^2-3b^2}}{8}$. 7.44. ≈ 14,9 dm³. 7.45. $18\sqrt{39}$ cm³ ≈ 112 cm³. 7.46. $abc\sqrt{-\cos 2\alpha}$, $\frac{\pi}{4}<\alpha<\frac{\pi}{2}$. 7.47. 192 cm³. 7.48. $2\sqrt{3}$ m³ ≈ 3,5 m³. 7.50. 122,4 cm³. 7.51. $\frac{a^3\sqrt{\cos\alpha}}{6\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}}$, $\alpha<\frac{\pi}{2}$. 7.52. $\frac{a^3}{6}\operatorname{sen}^2\alpha\operatorname{tg}\varphi$. 7.53. $\frac{1}{3}a^2h\operatorname{sen}\alpha$. 7.54. $\frac{1}{3}h^2H\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$. 7.55. $\frac{1}{3}S\sqrt{2S\sqrt{3}}$. 7.56. ≈ 2,6 millones de m³. 7.57. ≈ 1,7 cm. 7.58. $\frac{abc}{3}\sqrt{2}$.

7.59. 1900 m³. 7.60. 5600 cm³. 7.61. 2100 cm³. 7.62. $\frac{1}{24}(a^3-b^3)\operatorname{tg}\alpha$. 7.63. $\frac{a^3-b^3}{6\cos\alpha}\sqrt{-\cos 2\alpha}$, $\frac{\pi}{4}<\alpha<\frac{\pi}{2}$. 7.64. $\frac{3a^2}{4\sqrt{1-2\cos\varphi}}$, $\frac{\pi}{3}<\varphi<\pi$. 7.65. a) $\frac{\pi^2}{2}$; b) 12π; c) $1,6\pi$; d) $\frac{272}{15}\pi$; e) $\frac{\pi^2}{12}$; f) $0,3\pi$; g) $\frac{\pi}{4}$; h) $\frac{\pi(a+3)a^2}{3}$. 7.66. $\pi\sqrt{3}$ cm³. 7.67. $9\pi\sqrt{3}$ cm³. 7.68. $3\pi\sqrt{3}$ cm³. 7.69. $18\pi\sqrt{3}$ cm³. 7.70. $\frac{2\pi d^3}{3\operatorname{sen}2\varphi\operatorname{sen}\varphi\cos^2\frac{\alpha}{2}}$. 7.71. 320π cm³. 7.72. $4,5\pi\sqrt{2}$ cm³. 7.73. 448π dm³. 7.74. $\frac{2}{3}\pi S\times\sqrt{S\operatorname{sen}2\alpha}$. 7.75. $\frac{1}{12}\pi a^3\operatorname{tg}^2\alpha$. 7.76. $\frac{4}{3}\pi S\sqrt{S\operatorname{sen}2\alpha}$. 7.77. $\frac{1}{3}\times\pi m^3\operatorname{sen}^2\beta$. 7.78. ≈ 19 t. 7.79. $\approx 1,6$ m. 7.80. 182π dm³. 7.81. $10\,500\pi$ cm³. 7.82. 1946π cm³. 7.83. $2\pi a^3\operatorname{sen}\alpha\cos^2\frac{\alpha}{2}$. 7.84. $\pi d^3\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$. 7.85. 2 %. 7.86. Es más grande el volumen de la esfera. 7.87. El modelo de la esfera es más ligero. 7.88. 3 : 1. 7.89. 20 : 7. 7.90. 5 : 27. 7.91. $\frac{166\,912}{3}\pi$ cm³. 7.92. $\frac{\pi}{3}R^3$. 7.93. $\frac{4}{3}\times\pi R^3\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2}$. 7.94. $4\sqrt{3}\pi$ dm³. 7.95. 3 : 1. 7.96. $\frac{\sqrt{3}}{2}\pi m^3$. 7.97. $\frac{\pi a^3\sqrt{3}}{54}\operatorname{tg}^3\frac{\varphi}{2}$. 7.98. $\frac{3V\sqrt{2}}{8\pi}\operatorname{sen}2\alpha$. 7.99. $\frac{2}{3}\pi R^3\operatorname{sen}^2 2\alpha\times\cos^2\alpha$. 7.100. $\frac{4}{3}R^3\operatorname{sen}^2 2\varphi\operatorname{sen}^2\varphi\operatorname{sen}2\alpha$. 7.101. $\frac{\pi}{6}a^3\times\left(\frac{\sqrt{3\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}-1}}{\sqrt{3}+3\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}\right)$. 7.102. $\frac{S}{3}\sqrt{\frac{S}{\pi}}\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}^3\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)$. 7.103. $\frac{s^3\sqrt{2}\operatorname{sen}\alpha}{8\operatorname{sen}^5\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)}$. 7.104. $\frac{r^3}{3}\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\beta$. 7.105. πQ. 7.106. $\frac{l^2}{2\pi}(\cos^2\alpha+\pi\operatorname{sen}2\alpha)$. 7.107. $25\sqrt{3}\pi$ cm² ≈ 136 cm², $(25\sqrt{3}+12,5)\pi$ cm² ≈ 175 cm². 7.108. ≈ 35 miles de m². 7.109. $\pi h^2\operatorname{ctg}\varphi$. 7.110. $2\pi h^2\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$. 7.111. $12\pi a^2$. 7.112. $\pi l^2\operatorname{sen}\frac{\varphi}{2}$,

$\pi l^2 \operatorname{sen} \frac{\varphi}{2} \left(1 + \operatorname{sen} \frac{\varphi}{2}\right)$. **7.113.** $\pi l \sqrt{\frac{Q}{\pi}}$, $\pi l \sqrt{\frac{Q}{\pi}} + Q$.

7.114. ≈ 40 hojas. **7.115.** $\frac{1}{2} \pi a (2 + \sqrt{3})$. **7.116.** $\frac{\pi b^2 \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2}}{2 \operatorname{sen} \frac{\varphi}{2}}$.

7.17. $2\pi a (a + b) \operatorname{sen} \alpha$. **7.118.** a) $\frac{61\pi}{1728}$; b) $\frac{2\pi p^3}{3} (2\sqrt{2} - 1)$; c) $2\pi \times$ $\times (\sqrt{2} + \ln (1 + \sqrt{2}))$; d) $4\pi^2 ab$; e) $\frac{12}{5} \pi a^2$; f) π; h) $\frac{128}{5} \pi$.

7.119. 25π m². **7.120.** $\frac{41}{16} \pi a^2$. **7.121.** 400π m², 1100π m². **7.122.** $3R$.

7.123. $\approx 11{,}5$ millones de km². **7.124.** 2,3 % y 1,3 %.

ALGUNAS FÓRMULAS Y ECUACIONES

I. Vectores

1. La longitud del vector $\boldsymbol{a} = (x;\ y;\ z)$ es:

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

2. El producto escalar de los vectores $\boldsymbol{a} = (x_1;\ y_1;\ z_1)$ y $\boldsymbol{b} = (x_2;\ y_2;\ z_2)$ es:

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$$

3. El producto vectorial de los vectores $\boldsymbol{a} = (x_1;\ y_1;\ z_1)$ y $\boldsymbol{b} = (x_2;\ y_2;\ z_2)$.

$$[\boldsymbol{a};\ \boldsymbol{b}] = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}.$$

4. El producto mixto de los vectores $\boldsymbol{a} = (x_1;\ y_1;\ z_1)$, $\boldsymbol{b} = (x_2;\ y_2;\ z_2)$ y $\boldsymbol{c} = (x_3;\ y_3;\ z_3)$ es:

$$(\boldsymbol{a};\ \boldsymbol{b};\ \boldsymbol{c}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

5. El coseno del ángulo entre los vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$,

$$\cos(\widehat{\boldsymbol{a};\ \boldsymbol{b}}) = \frac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}|}.$$

II. La recta en el plano

1. Ecuación general de la recta:

$$Ax + By + C = 0, \quad A^2 + B^2 \neq 0.$$

2. Las ecuaciones paramétricas de una recta con vector director $\boldsymbol{a} = (a_1;\ a_2)$, que pasa por el punto $(x_0;\ y_0)$ son:

$$\begin{cases} x = x_0 + a_1t, \\ y = y_0 + a_2t, \end{cases} \quad t \in \boldsymbol{R}.$$

3. Ecuación de la recta que pasa por dos puntos $(x_1;\ y_1)$ y $(x_2;\ y_2)$:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

4. La ecuación segmentaria de una recta, es decir, la ecuación de la recta que pasa por los puntos $(a;\ 0)$ y $(0;\ b)$, $a \neq 0$, $b \neq 0$ es:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

5. Ecuación de una recta con coeficiente angular k y ordenada inicial b:

$$y = kx + b.$$

6. Ecuación de una recta que pasa por el punto $(x_0;\ y_0)$ perpendicularmente al vector $n = (A;\ B)$:

$$A\,(x - x_0) + B\,(y - y_0) = 0.$$

7. La ecuación normal de una recta es:

$$x \cos\varphi + y \operatorname{sen}\varphi - p = 0, \quad p > 0,$$

donde p es la distancia del origen de coordenadas a la recta, φ es la magnitud del ángulo entre el eje Ox y el vector normal de la recta.

8. La distancia d del punto $(x_1;\ y_1)$ a la recta, definida por la ecuación normal es:

$$d = |\, x_1 \cos\varphi + y_1 \operatorname{sen}\varphi - p \,|.$$

9. El coseno del ángulo entre las rectas definidas por las ecuaciones $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ y $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ es:

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\,\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}.$$

10. La tangente del ángulo entre las rectas, definidas por las ecuaciones $y = k_1x + b_1$ y $y = k_2x + b_2$ es:

$$\operatorname{tg}\varphi = \left|\frac{k_1 - k_2}{k_1k_2 + 1}\right|.$$

III. Curvas de segundo orden

1. Ecuación de la circunferencia de radio R con centro en el punto $(a;\ b)$:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2.$$

2. Ecuación canónica de la elipse:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a \geqslant b,$$

donde a es el semieje mayor, b es el menor.

3. Ecuación canónica de la hipérbola:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

donde a es el semieje real, b, el imaginario.

4. Ecuación canónica de la parábola:

$$y^2 = 2px, \quad p > 0.$$

5. La dependencia entre la distancia semifocal c y los semiejes a y b es:

para la elipse $c^2 = a^2 - b^2$,

para la hipérbola $c^2 = a^2 + b^2$.

IV. Volúmenes de los cuerpos

1. Paralelepípedo rectangular con dimensiones a, b, c:

$$V = abc.$$

2. Prisma con área de base Q y altura H:

$$V = QH.$$

3. Pirámide con área de base Q y altura H:

$$V = \frac{1}{3} QH.$$

4. Pirámide truncada con áreas de las bases igualas a Q y q y altura H:

$$V = \frac{1}{3} (Q + \sqrt{Qq} + q) H.$$

5. Cilindro circular con radio de la base igual a R y altura H:

$$V = \pi R^2 H.$$

6. Cono circular con radio de la base igual a R y altura H:

$$V = \frac{1}{3} \pi R^2 H.$$

7. Cono truncado circular con radios de las bases R y r y altura H:

$$V = \frac{1}{3} \pi (R^2 + Rr + r^2).$$

8. Esfera de radio R:

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3.$$

9. El cuerpo formado por la rotación alrededor del eje Ox de un trapecio curvilíneo, correspondiente a la función $y = f(x)$, $x \in [a; b]$ es:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\, dx.$$

10. El cuerpo situado entre los planos $x = a$, $x = b > a$, con área $S(x)$ perpendicular al eje Ox de la sección,

$$V = \int_a^b S(x)\, dx.$$

V. Areas de las superficies laterales

1. Pirámide regular con perímetro de base P y apotema h:

$$S = \frac{1}{2} Ph.$$

2. Pirámide regular truncada con perímetros de bases P y P_1 y apotema h:

$$S = \frac{1}{2}(P + P_1)\, h.$$

3. Cilindro recto circular con radio de base R y altura H:

$$S = 2\pi RH.$$

4. Cono recto circular con radio R y generatriz D:

$$S = \pi RL.$$

5. Cono recto circular truncado con radios de bases R y r y generatriz L:

$$S = \pi (R + r)\, L.$$

VI. Areas de lás superficies

1. La esfera de radio R es:

$$S = 4\pi R^2$$

2. La superficie formada por la rotación alrededor del eje Ox del gráfico de la función $y = f(x)$, $x \in [a, b]$ es:

$$S = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx.$$

BREVE ESBOZO HISTÓRICO

El inicio de la geometría data de tiempos remotos y se debió a necesidades prácticas (medición de parcelas de tierra, volúmenes de cuerpos). Esto lo testimonian los textos de autores de la Grecia Antigua, por ejemplo, de Eudemo de Rodas (siglo IV a.n.e.) y Herodoto (siglo IV a.n.e.).

«Sestiostris, rey de Egipto, cuenta Nerodoto, repartió las tierras dando a cada egipcio una parcela según el sorteo. Conforme a estas parcelas sus dueños pagaban cada año los impuestos. Si una de las parcelas era inundada por el Nilo, su dueño se dirigía al rey. El rey mandaba a los agrimensores (geómetras), los cuales medían en cuanto disminuyó la parcela y según los resultados se reducía el impuesto».

Se necesitaba almacenar la cosecha recogida de las parcelas. Surgió la necesidad de calcular las capacidades de los depósitos de granos. En el papiro de Ajmes (aproximadamente 1700 a.n.e.) hay problemas de cálculo de volúmenes de los depósitos de granos.

Así pues, ya a los antiguos egipcios les eran conocidos los más simples datos y nociones de geometría.

En las matemáticas egipcias de aquel entonces no había definiciones, axiomas, teoremas y sus demostraciones. La exposición de los conocimientos matemáticos se reducía a ejemplos y prescripciones destinados a la solución de problemas aislados.

Sin embargo, el desarrollo de la geometría como ciencia tuvo lugar principalmente en la Grecia Antigua. Aquí se iban acumulando datos sobre las relaciones métricas en los triángulos, sobre las mediciones de las áreas y volúmenes, relación de semejanza y de las proporciones de figuras, secciones cónicas, problemas de construcción.

Con el nombre de Tales de Mileto (aprox. 625-547 a.n.e.), filósofo y matemático griego, está relacionada la aparición de las primeras demostraciones de algunos teoremas de geometría (el diámetro divide el círculo por la mitad; los ángulos de la base de un triángulo isósceles son iguales; el criterio de igualdad de los triángulos por un lado y dos ángulos). Es interesante señalar que Tales utilizaba los conocimientos teóricos para resolver problemas prácticos (medición de la altura de una pirámide según la sombra que ella produce; determinación de la distancia de un barco al litoral).

De este modo se dió el inicio a la formación científica de la geometría.

El trabajo iniciado por Tales fue continuado posteriormente por

otros sabios: Pitágoras (aproximadamente 580-500 a.n.e.), Hipócrates de Quíos (segunda mitad del siglo V a.n.e.), Eudoxio de Cíclico (aproximadamente 480-355 a.n.e.).

Los «Elementos» de Euclides (aprox. 365-300 a.n.e.) son la primera obra teórica de las matemáticas que se conservó hasta nuestros días.

Euclides realizó su actividad científica en Alejandría. Este sabio escribió no sólo trabajos de matemática, sino también de física, astronomía y música.

Cuentan de Euclides, que amaba la ciencia abnegadamente y nunca admitía la insinceridad. Una vez el rey Ptolomeo le preguntó, si había una vía más corta para el conocimiento de la geometría, que el estudio de los Elementos, respondiendo Euclides con orgullo que en la geometría no existía el camino de reyes.

Los Elementos son la obra cumbre de Euclides. En ella fueron formulados los principales postulados (axiomas) de la geometría, de los cuales, con ayuda de razonamientos lógicos, se deducían las distintas propiedades de las figuras más simples en el plano y en el espacio. En esta obra por primera vez se formaron las bases del método axiomático.

Durante dos mil años la geometría se estudió por los Elementos de Euclides. Esta obra era casi el único manual de geometría en las escuelas.

Solamente a finales del siglo XVIII fueron escritos nuevos manuales de geometría por grandes matemáticos, que eran a la vez profesores de talento.

El desarrollo de la geometría, justamente hasta el siglo XVII, tuvo lugar no tan intensamente. El renacimiento de las ciencias y las artes en Europa contribuía al desarrollo de la geometría.

En la primera mitad del siglo XVII R. Descartes (1596-1650), filósofo, matemático, físico y fisiólogo francés, propuso un enfoque completamente nuevo a la solución de los problemas de geometría. Las investigaciones matemáticas de René Descartes están estrechamente ligadas a sus trabajos filosóficos y de física. El creó el método de coordenadas que permitió introducir en la geometría los métodos del álgebra y, posteriormente, del análisis. En 1637 Descartes introdujo por primera vez en la geometría las nociones de variable y de función. Para Descartes la variable se expresa como un segmento de variable longitud e invariable dirección (coordenada instantánea de un punto que, moviéndose, describe una curva) y como una variable numérica continua que recorre un conjunto de números, que forman un segmento de coordenadas. La imagen de variable doble acondicionó la penetración recíproca de la geometría y el álgebra, a la cual aspiraba Descartes.

«La variable cartesiana, señalaba F. Engels, fue el punto de viraje en la matemática. Debido a ella el movimiento y, por lo tanto, la dialéctica formaron parte de las matemáticas» [1]).

A partir de este momento la geometría se desarrolla impetuosamente. Aparece la geometría analítica, en la cual por métodos algebraicos se investigan las curvas y las superficies definidas por ecuaciones algebraicas. El método de coordenadas creado por Descartes

[1]) C. Marx y F. Engels. Obras completas, vol. 20, pág. 573.

se considera como su logro principal en la geometría analítica, ciencia que ha sido elaborada a la vez por él y por Pierre Fermat (1601-1665).

Los métodos de análisis matemático empleados en la geometría por L. Euler (1707-1783) y C. Monge (1746-1818) echaron las bases de la geometría diferencial. Sus partes principales, la teoría de las curvas y la teoría de las superficies, se desarrollaron y generalizaron intensamente en los trabajos de C. Gauss (1777-1855) y otros geómetras.

La geometría comenzaba a dar sus pasos como ciencia física y sus primeros resultados describían las propiedades de las magnitudes físicas observadas. Luego, hasta la segunda mitad del siglo XIX, la geometría tenía como objeto las relaciones y las formas de los cuerpos del espacio, cuyas propiedades se definían por medio de axiomas formulados por Euclides. Entre estos axiomas, el axioma de las paralelas (quinto postulado) fue con frecuencia llamado mancha negra en la obra genial de Euclides la cual es como si se dividiera en dos partes. Una parte consta de teoremas que no dependen del quinto postulado y la otra contiene teoremas, cuyas demostraciones se basan bien directamente en el axioma de las paralelas o bien en los teoremas, demostrados basándose en este axioma.

Naturalmente surgía la pregunta: «¿No es posible librarse del quinto postulado como axioma o demostrarlo?»

Las tentativas de demostrar el axioma de las paralelas duraron más de dos mil años. Casi todos los eminentes matemáticos probaron sus fuerzas en la solución de este problema. Sin embargo, el problema quedaba sin resolver. Para salir de esta situación y encontrar una vía correcta a la solución del problema era necesario no temer a enfrentarse a las personalidades de prestigio, tener un espíritu revolucionario, gran audacia científica, se necesitaba un genio del pensamiento matemático, capaz de romper con los prejuicios multiseculares y de una forma nueva comprender y resolver el problema.

El gran matemático ruso Nicolás I. Lobachevski (1792-1856) resultó ser tal genio y revolucionario en la ciencia. Por primera vez N. I. Lobachevski estableció rigurosa y científicamente la infructuosidad de las tentativas de demostrar el axioma de las rectas paralelas. El demostró que es imposible deducir la afirmación de este axioma de los demás axiomas de Euclides.

En 1826 N. I. Lobachevski construyó la geometría que tiene por base un sistema de axiomas, que se diferencia del sistema de axiomas de Euclides sólo en el axioma de las rectas paralelas.

Como resultado apareció una geometría lógicamente no contradictoria, que se diferencia sustancialmente de la euclídea.

Las ideas de N. I. Lobachevski eran tan originales e inesperadas, y hasta tal punto adelantaron su siglo, que no fueron comprendidas incluso por los grandes matemáticos de aquel tiempo.

N. I. Lobachevski, insigne profesor y rector (dirigente) de la Universidad de Kazán, se ocupaba incansablemente de todos los asuntos de la Universidad. Trabajaba constantemente por mejorar la enseñanza de las matemáticas en las escuelas, escribió manuales de álgebra y geometría. Condenó siempre a las personas que no deseaban trabajar debidamente y aportar el máximo posible a la sociedad.

N. I. Lobachevski era no sólo un geómetra de fuerza creativa excepcional, sino también un matemático dotado de un talento multifacético.

Después de que las ideas de Lobachevski ganaron notoriedad, su geometría empezó a desarrollarse impetuosamente, especialmente en los trabajos de B. Riemann (1826-1866), A Kelly (1821-1895), F. Klein (1849-1925), D. Hilbert (1862-1943).

Los trabajos de B. Riemann adquirieron un significado especial debido a que sus ideas y las ideas de N. I. Lobachevski constituyeron la base matemática de la teoría de la relatividad de A. Einstein (1879-1955).

La geometría de N. I. Lobachevski y, seguidamente descubierta, la geometría no euclidiana de Riemann son parte sólida de la ciencia moderna y encuentran aplicación en la solución de los complicados problemas teóricos y prácticos de la matemática, de la física y de la técnica modernas. Sin embargo, la geometría de Euclides conserva su importancia en lo que se refiere a la práctica, en la construcción, en la técnica y, por lo tanto, es objeto de estudio en las escuelas de enseñanza general y de peritaje.

El desarrollo de la geometría y sus aplicaciones en las distintas ramas de las matemáticas y de las ciencias naturales evidencian la importancia de la geometría como uno de los medios más profundos y fecundos, por las ideas y por los métodos, en el conocimiento de la realidad objetiva.

La ciencia matemática soviética siempre prestó gran atención al desarrollo de la geometría logrando en esta rama del saber notables éxitos.

A nuestros lectores:

Mir edita libros soviéticos traducidos al español, inglés, francés, árabe y otros idiomas extranjeros. Entre ellos figuran las mejores obras de las distintas ramas de la ciencia y la técnica: manuales para los centros de enseñanza superior y escuelas tecnológicas; literatura sobre ciencias naturales y médicas. También se incluyen monografías, libros de divulgación científica y ciencia ficción. Dirijan sus opiniones a la Editorial Mir, 1 Rizhski per, 2, 129820, Moscú, I-110, GSP, URSS.

En 1984 Mir publica:

A. Tsipkin

MANUAL DE MATEMÁTICAS PARA LA ENSEÑANZA MEDIA

El manual está destinado para las escuelas de enseñanza media general y técnica y contiene una exposición amplia de las partes de las matemáticas que integran el programa de enseñanza media. La obra se compone de los siguientes apartados: elementos de la teoría de conjuntos, números reales, números complejos, método de coordenadas, geometría, trigonometría, teoría de los límites, principios del cálculo diferencial e integral, funciones elementales.
Algunos de los apartados que integran este libro no forman parte actualmente del programa escolar, pero son imprescindibles para una mejor comprensión de los fundamentos de las matemáticas. Entre ellos cabe señalar: la divisibilidad de los números enteros y polinomios, los algoritmos de Euclides, el teorema fundamental del álgebra, las curvas de segundo orden, etc. Junto con los conocimientos elementales que tienen carácter general, en el manual se examinan las propiedades aproximadas de las fracciones continuas y se da uno de los más simples y conocidos métodos del cálculo aproximado, el método de tangentes de Newton.
El manual tiene fundamentalmente un carácter teórico y puede servir no sólo como guía, sino que también como un libro de repaso y se da uno de los más simples y conocidos métodos del cálculo paración de los exámenes de ingreso en los centros de enseñanza superior.

N. Efímov

GEOMETRÍA SUPERIOR

En este libro se examina un gran número de problemas. Se da una argumentación matemática de la geometría euclídea y de las geometrías no euclídeas de Lovachevski y Rieman, de la geometría proyectiva, geometría de Minkovski y de las cuestiones geométricas de la teoría espacial de la relatividad, así como una noción general de las formas topológicas de la geometría de curvatura constante. La obra se divide en tres partes. El material principal se expone en las dos primeras. El libro se caracteriza por la claridad de su exposición, aunque las cuestiones que trata, por decirlo así, no siempre son sencillas. Ha sido reeditado varias veces en la URSS y en otros países. La obra está dirigida a los estudiantes de los centros docentes superiores, así como a todos aquellas personas que se interesan por la matemática.